Ασκήσεις 1

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Από τις σημειώσεις κεφάλαιο 1: 3,4,5,7,9,14,15,16,19,20

1. Θεωρούμε την καμπύλη $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

ι) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μήκος τόξου, $s(t)$ της α ξεκινώντας από το $t = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{t\to\infty} s(t)$ είναι πεπερασμένο.

ιι) Δείξτε ότι η γωνία ανάμεσα στο $\alpha(t)$ και την εφαπτομένη στο σημείο $\alpha(t)$ δεν εξαρτάται από το t.

2. Δείξτε ότι η καμπύλη $\alpha(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$ είναι κύκλος. Βρείτε το κέντρο, την ακτίνα του και το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται.

3. Αποδείξτε ότι αν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας καμπύλης α περνάνε από ένα σημείο p_0 τότε η α περιέχεται σε μία σφαίρα με κέντρο p_0 (υποδ. παραγωγίστε την $< \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 >$).

4. Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και υποθέστε ότι η καμπυλότητα είναι μη μηδενική για κάθε t. Δείξτε ότι αν υπάρχει επίπεδο E τέτοιο ώστε το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της α , $B(t)$, περιέχεται στο E για κάθε t τότε η α είναι επίπεδη.

5. Δείξτε ότι η καμπύλη

$$\gamma(t) = (\frac{1+t^2}{t}, 1+t, \frac{1-t}{t})$$

είναι επίπεδη.

6. Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και υποθέστε ότι η καμπυλότητα είναι μη μηδενική για κάθε t. Ορίζουμε μία νέα καμπύλη με $\gamma(t) = \alpha'(t)$. Δείξτε ότι η γ είναι κανονική καμπύλη και ότι η καμπυλότητα της δίνεται απ΄ τον τύπο:

$$(1 + \frac{\tau^2}{k^2})^{1/2}$$

όπου k, τ είναι αντίστοιχα η καμπυλότητα και η στρέψη της α.

Λύσεις στην ιστοσελίδα: http://users.uoa.gr/ ppapazog/teaching/