Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Παναγιώτης Παπάζογλου

1 Εισαγωγή

Η Διαφορική Γεωμετρία θεμελιώθηκε με το άρθρο του Gauss, 'General Investigations of Curved Surfaces', (1827) και αναπτύχθηκε περισσότερο από τον μαθητή του Gauss, Riemann. Αναφέρουμε επίσης τις προγενέστερες εργασίες των Euler, Meusnier.

Ερώτημα που έθεσε ο Gauss : Μπορεί να καταλάβει ένα δισδιάστατο ον που ζεί σε μια επιφάνεια αν αυτή είναι καμπυλωμένη;

Για παράδειγμα ας πούμε ότι ζούμε σε ένα κύλινδρο, η σε μία σφαίρα, μπορούμε να καταλάβουμε ότι δε ζούμε στο επίπεδο, απλά κοιτώντας γύρω μας, χωρίς να κάνουμε `το γύρο του κόσμου΄;

Αυτό το ερώτημα το απαντά η Διαφορική Γεωμετρία, για τον κύλινδρο και το επίπεδο η απάντηση είναι όχι ενώ για τη σφαίρα και το επίπεδο η απάντηση είναι ναι!

Η Γεωμετρία μελετήθηκε πολύ από την αρχαιότητα. Απ΄ αυτήν ξεπήδησε με την Ευκλείδια Γεωμετρία η Αξιωματική μέθοδος που αποτελεί τη βάση των σύγχρονων μαθηματικών. Ωστόσο το πεδίο της Ευκλείδιας Γεωμετρίας ήταν περιορισμένο σε σχετικά απλούς γεωμετρικούς τόπους που μπορούσαν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη η γενικότερα ορίζονταν με σχετικά απλό τρόπο. Ένα άλλο χαρακτηριστικό ήταν ο φιλοσοφικός περιορισμός της, η πίστη ότι τα αξιώματα της Ευκλείδιας Γεωμετρίας ισχύουν στο σύμπαν. Αυτό το τελευταίο τέθηκε εν αμφιβόλω ήδη από την αρχαιότητα· μεγάλη φιλοδοξία για τους Γεωμέτρες της αρχαιότητας ήταν να αποδείξουν ότι το αίτημα των παραλλήλων έπεται από τα άλλα αξιώματα. Τελικά το 1829 ο Lobachevski-i απέδειξε ότι αυτό δεν ισχύει δημιουργώντας την υπερβολική Γεωμετρία. Η μοντέρνα Γεωμετρία που αναπτύχθηκε από τον Gauss και τον μαθητή του τον Riemann είναι η βάση της θεωρίας της σχετικότητας του Einstein.

Η μελέτη πολύπλοκων γεωμετρικών τόπων έγινε δυνατή με την ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού. Αυτό είναι το βασικό ` εργαλείο΄ της διαφορικής γεωμετρίας.

Σ΄ αυτό το μάθημα θα μελετήσουμε καμπύλες και επιφάνειες στο $\mathbb{R}^3$.

Παραδείγματα. *Παραδείγματα καμπυλών στο επίπεδο: Η ευθεία, δίνεται από την εξίσωση:*

$$ax + by = c$$

ο κύκλος:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

η έλλειψη:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$$

Παραδείγματα. *Παραδείγματα επιφανειών στο χώρο: Το επίπεδο, δίνεται από την εξίσωση:*

$$ax + by + cz = d$$

ο κύλινδρος:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

η σφαίρα:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

2 Καμπύλες

2.1 Διαφορίσιμες καμπύλες

Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^3$ τον 3-διάστατο χώρο, έχουμε

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Αν $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ τότε $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Η $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη ανν οι $x(t), y(t), z(t)$ είναι παραγωγίσιμες. Σ' αυτή την περίπτωση η παράγωγος της f δίνεται από

$$f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Αν η f έχει παράγωγους κάθε τάξης λέμε ότι η f είναι **διαφορίσιμη**. Αυτό ισχύει φυσικά ανν οι $x(t), y(t), z(t)$ έχουν παράγωγους κάθε τάξης.

Συμβολισμός: Αν η f είναι διαφορίσιμη λέμε ότι η f είναι τάξης C^∞.

Στη Διαφορική Γεωμετρία μελετούμε τις καμπύλες χρησιμοποιώντας την παραμετρική τους αναπαράσταση.

Ορισμός. *Μιά* ***παραμετρημένη διαφορίσιμη καμπύλη*** *στο χώρο είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, όπου I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Συνήθως θα λέμε απλά καμπύλη αντί για παραμετρημένη διαφορίσιμη καμπύλη. Σημειώνουμε ότι αυτό που μας ενδιαφέρει πραγματικά είναι η εικόνα $\alpha(I)$, η απεικόνιση α είναι απλά το εργαλείο που μας βοηθά να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες της εικόνας.

Αν η εικόνα της α περιέχεται σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ λέμε ότι η α είναι **επίπεδη καμπύλη**.

Παράδειγμα 2.1. *Ο κύκλος ακτίνας 1: $x^2+y^2 = 1$ είναι μία επίπεδη καμπύλη. Μία παραμέτρησή του δίνεται από*

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$$

Παράδειγμα 2.2. *Αν p, q σημεία του $\mathbb{R}^3$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα p, q δίνεται από:*

$$\alpha(t) = p + t(q - p), \ t \in [0, 1]$$

Παράδειγμα 2.3. *Μία παραμέτρηση της έλλειψης:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

δίνεται από

$$\alpha(t) = (ar\cos t, br\sin t), \ t \in [0, 2\pi]$$

Παράδειγμα 2.4. *Η κυκλική έλικα είναι η καμπύλη που δίνεται από την παραμέτρηση:*

$$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, bt), \ t \in \mathbb{R}, \ r > 0, \ b \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι η κυκλική έλικα περιέχεται στον κύλινδρο με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$.

Διαφορετικές παραμετρημένες καμπύλες μπορεί να έχουν την ίδια εικόνα:

Παράδειγμα 2.5. *Οι καμπύλες:*

$$\alpha(t) = (t, t), \ t \in \mathbb{R}$$
$$\beta(t) = (2t, 2t), \ t \in \mathbb{R}$$
$$\gamma(t) = (t^5, t^5), \ t \in \mathbb{R}$$

έχουν όλες την ίδια εικόνα.

Παράδειγμα 2.6. *Η απεικόνιση*

$$\alpha(t) = (t, |t|), \ t \in \mathbb{R}$$

δεν ορίζει διαφορίσιμη καμπύλη αφού η α δεν είναι παραγωγίσιμη για $t = 0$.

Παράδειγμα 2.7. *Η απεικόνιση*

$$\alpha(t) = (\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{t}), \ t \in \mathbb{R}$$

δεν ορίζει διαφορίσιμη καμπύλη αφού η α δεν είναι παραγωγίσιμη για $t = 0$. Παρατηρούμε ωστόσο ότι η απεικόνιση

$$\beta(t) = (t, t), \ t \in \mathbb{R}$$

ορίζει διαφορίσιμη καμπύλη και $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})$!

Αν $\alpha : I \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη και $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ τότε το **εφαπτόμενο διάνυσμα** στο σημείο $\alpha(t)$ είναι το διάνυσμα

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Μπορούμε να φανταστούμε ότι ένα σημείο κινείται πάνω σ' αυτή την καμπύλη. Τότε η παράμετρος t είναι ο χρόνος και το σημείο βρίσκεται στη θέση $\alpha(t)$ στο χρόνο t. Το **διάνυσμα της ταχύτητας** τότε του σημείου δίνεται από

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \alpha'(t)$$

Το μήκος αυτού του διανύσματος

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

ονομάζεται **ταχύτητα** της α στο t. Η δεύτερη παράγωγος:

$$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

ονομάζεται **επιτάχυνση** της α στο t.

Φυσικά αν για κάποιο t_0 ισχύει ότι $\alpha'(t_0) = 0$ τότε δεν μπορούμε να βρούμε την εφαπτομένη της καμπύλης χρησιμοποιώντας το εφαπτόμενο διάνυσμα αφού αυτό μηδενίζεται. Ένα τέτοιο σημείο λέγεται *σημείο ανωμαλίας* της καμπύλης. Γενικά θα περιοριστούμε σε καμπύλες των οποίων η παράγωγος δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Τέτοιες καμπύλες λέγονται **κανονικές** η **ομαλές**.

Παράδειγμα 2.8. *Η καμπύλη*

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \text{ που δίνεται με } \alpha(t) = (t^3, t^2)$$

δεν είναι ομαλή αφού $\alpha'(0) = (0, 0)$.

Ορισμός. *Το* ***μήκος*** *μιάς καμπύλης*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

δίνεται από

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Αν δούμε την καμπύλη γ σαν τροχιά ενός σημείου τότε το μήκος της καμπύλης είναι η απόσταση που διανύει το σημείο. Αυτή η απόσταση δίνεται από το ολοκλήρωμα της ταχύτητας.

Διαισθητικά μπορούμε να αιτιολογήσουμε αυτό τον ορισμό ως εξής: Αν $a = t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ είναι μία 'πολύ λεπτή' διαμέριση του $[a, b]$ τότε το μήκος της καμπύλης από το $\gamma(t_i)$ ως το $\gamma(t_{i+1})$ είναι προσεγγιστικά ίσο με την απόσταση $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παράγωγος της

γ είναι σχεδόν σταθερή στο $[t_i, t_{i+1}]$ επομένως $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|$ είναι σχεδόν ίσο με $\|\gamma'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i)$. Επομένως το μήκος της καμπύλης προσεγγίζεται από το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \|\gamma'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i)$$

Όπως ξέρουμε από τον απειροστικό λογισμό όταν η διαμέριση γίνεται όλο και πιο λεπτή το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει στο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Παράδειγμα 2.9. ***Η κυκλοειδής.*** *Κύκλος ακτίνας r στέκεται στο σημείο $(0,0)$ και αρχίζει να κυλά πρός τα δεξιά πάνω στον άξονα Ox.*

i) Να βρεθεί η καμπύλη (κυκλοειδής) που διαγράφει το σημείο A που αρχικά ακουμπά στο σημείο $(0,0)$. Είναι αυτή η καμπύλη ομαλή;

ii) Να υπολογιστεί η απόσταση που διανύει το σημείο A ώσπου να ακουμπήσει ξανά τον άξονα Ox.

Λύση

i)Αν ο κύκλος κυλήσει και διανύσει ένα τόξο μήκους θ τότε οι συνεταγμένες του σημείου A είναι: $(r(\theta - \sin\theta), r(1 - \cos\theta))$ επομένως μπορούμε να παραμετρήσουμε την κυκλοειδής με

$$\alpha(\theta) = (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta),\ \theta \in [0, \infty)$$

Παρατηρούμε ότι η α είναι διαφορίσιμη. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$\alpha'(\theta) = (r - r\cos\theta, r\sin\theta),\ \theta \in [0, \infty)$$

$$\alpha'(\theta) = 0 \Leftrightarrow r\cos\theta = r \textit{ και } r\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η α δεν είναι ομαλή. Τα ανώμαλα σημεία δίνονται από $\theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Το A ακουμπάει ξανά στόν άξονα Ox για $\theta = 2\pi$. Το μήκος της α στο διάστημα $[0, 2\pi]$ δίνεται από

$$L = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2cos\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2r\sin(\frac{\theta}{2}) d\theta = 2r\int_0^{\pi} 2\sin u\, du = 8r$$

Άσκηση 2.1. *Κύκλος ακτίνας r εφάπτεται στον κύκλο ακτίνας 1 και κέντρο $(0,0)$ στο σημείο $(-1,0)$. Υποθέτουμε ότι ο κύκλος ακτίνας r βρίσκεται στα αριστερά του κύκλου ακτίνας 1 και έστω A το σημείο του που ακουμπά στο $(-1,0)$. Βρείτε μία παραμέτρηση της καμπύλης που διαγράφει το σημείο A καθώς ο κυκλος ακτίνας r κυλά γύρω από τον κύκλο ακτίνας 1.*

Εσωτερικό γινόμενο. Αν $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ το εσωτερικό γινόμενο των u,v ορίζεται με $<u,v>=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$. Παρατηρούμε ότι $<u,u>=\|u\|^2$, δηλ. το εσωτερικό γινόμενο του u με τον εαυτό του είναι ίσο με το τετράγωνο του μήκους του.

Άλλες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

1. $<u,v>=<v,u>$
2. $<u_1+u_2,v>=<u_1,v>+<u_2,v>$
3. $<\lambda u,v>=\lambda<u,v>$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
4. $<u,v>=\|u\|\|v\|\cos\theta$ όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα u,v.

Αν $\alpha,\beta: I\to\mathbb{R}^3$ καμπύλες ορίζουμε μία συνάρτηση

$$f: I\to\mathbb{R},\ f(t)=<\alpha(t),\beta(t)>$$

Αν $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)),\quad \beta(t)=(\beta_1(t),\beta_2(t),\beta_3(t))$ τότε

$$<\alpha(t),\beta(t)>=\alpha_1(t)\beta_1(t)+\alpha_2(t)\beta_2(t)+\alpha_3(t)\beta_3(t)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο συνήθης κανόνας για παραγώγιση γινομένου συναρτήσεων ισχύει και για το εσωτερικό γινόμενο, δηλ. έχουμε

$$f'(t)=<\alpha(t),\beta(t)>'=<\alpha'(t),\beta(t)>+<\alpha(t),\beta'(t)>$$

Δίνουμε τώρα μερικά απλά παραδείγματα εφαρμογών του διαφορικού λογισμού στη γεωμετρία των καμπυλών.

Παραδείγματα. ***1.*** *Έστω $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ (διαφορίσιμη) καμπύλη. Δείξτε ότι αν $\alpha''(t)=0$ για κάθε $t\in I$ τότε $\alpha(I)$ περιέχεται σε μία ευθεία.*

Έστω $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$.

$$\alpha''(t)=0\Leftrightarrow \alpha_1''(t)=0,\alpha_2''(t)=0,\alpha_3''(t)=0$$

Άρα

$$\alpha_1(t)=p_1t+q_1,\ \alpha_2(t)=p_2t+q_2,\ \alpha_3(t)=p_3t+q_3$$

και

$$\alpha(t)=t(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3)$$

δηλ. η $\alpha(I)$ περιέχεται στην ευθεία που περνά απ΄ το σημείο $q=(q_1,q_2,q_3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $p=(p_1,p_2,p_3)$.

2. *Έστω α διαφορίσιμη κανονική καμπύλη που δεν περνά απ΄ το 0. Αν $\alpha(t_0)$ είναι σημείο της εικόνας που ελαχιστοποιεί την απόσταση απ΄ το 0 τότε το $\alpha(t_0)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t_0)$.*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) =< \alpha(t), \alpha(t) >= \|\alpha(t)\|^2$. $f(t)$ δηλ. είναι ίσο με το τετράγωνο της απόστασης του σημείου $\alpha(t)$ απ΄ το 0. Αφού το $\alpha(t_0)$ ελαχιστοποιεί την απόσταση απ΄ το 0 το $f(t_0)$ είναι ελάχιστο της f άρα $f'(t_0) = 0$. Όμως

$$f'(t_0) = 2 < \alpha'(t_0), \alpha(t_0) >= 0$$

άρα $\alpha'(t_0) \perp \alpha(t_0)$.

3. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη κανονική καμπύλη. Η είκόνα της α, $\alpha(I)$ περιέχεται σε κύκλο με κέντρο το 0 αν και μόνο αν το $\alpha(t)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t)$ για κάθε $t \in I$.*

Η $\alpha(I)$ περιέχεται σε κύκλο με κέντρο το 0 αν και μόνο αν η συνάρτηση $f(t) =< \alpha(t), \alpha(t) >= \|\alpha(t)\|^2$ είναι σταθερή. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $f'(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Αλλά

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow < \alpha'(t), \alpha(t) >= 0 \Leftrightarrow \alpha'(t) \perp \alpha(t)$$

4. *Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα p, q είναι καμπύλη ελάχιστου μήκους που ενώνει τα σημεία p, q.*

Έστω $\alpha : [b, c] \to \mathbb{R}^3$ μία καμπύλη που ενώνει τα p, q. Θεωρούμε την καμπύλη που ορίζει η προβολή της $\alpha(t)$ στην ευθεία που περνά από τα p, q. Αυτή η καμπύλη δίνεται από τον τύπο

$$\beta(t) =< \alpha(t), u > u$$

όπου u είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο στην ευθεία, δηλ.

$$u = \frac{q - p}{\|q - p\|}$$

Έχουμε $\beta'(t) =< \alpha'(t), u > u$ και

$$\|\beta'(t)\| = \| < \alpha'(t), u > u\| = | < \alpha'(t), u > | \leq \|\alpha'(t)\|$$

Σημειώνουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι ισότητα για κάθε t αν και μόνο αν $\alpha'(t)$ είναι παράλληλο του u για κάθε t.

Έχουμε τώρα τις ανισότητες:

$$L(\alpha) = \int_b^c \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_b^c \| < \alpha'(t), u > u\| dt \geq \int_b^c < \alpha'(t), u > dt =$$

$$= \Big[< \alpha(t), u > \Big]_b^c = \|q - p\|$$

5. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη κανονική καμπύλη. Η εικόνα της α, $\alpha(I)$ περιέχεται σε ευθεία αν και μόνο αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε το $\alpha'(t)$ είναι παράλληλο στο u για κάθε $t \in I$.*

Αν $\alpha(t)$ περιέχεται σε μία ευθεία $p + tu$ τότε προφανώς το $\alpha'(t)$ είναι παράλληλο στο u για κάθε $t \in I$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το $\alpha'(t)$ είναι παράλληλο με κάποιο σταθερό διάνυσμα u για κάθε $t \in I$. Αν $t_0 \in I$ θα δείξουμε ότι $\alpha(I)$ περιέχεται στην ευθεία $\alpha(t_0) + tu$.

Έστω $p, q \in \mathbb{R}^3$ γραμμικά ανεξάρτητα κάθετα στο u. Για να δείξουμε ότι $\alpha(t)$ περιέχεται στην ευθεία $\alpha(t_0)+tu$ αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha(t)-\alpha(t_0) \perp p, q$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(t) =< \alpha(t) - \alpha(t_0), p >,\ g(t) =< \alpha(t) - \alpha(t_0), q >$$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$f'(t) =< \alpha(t) - \alpha(t_0), p >' =< \alpha'(t), p >= 0$$

$$g'(t) =< \alpha(t) - \alpha(t_0), q >' =< \alpha'(t), q >= 0$$

Άρα οι $f(t), g(t)$ είναι σταθερές. Αλλά $f(t_0) = g(t_0) = 0$, άρα $f(t) = g(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Επομένως $\alpha(t) - \alpha(t_0) \perp p, q$ για κάθε $t \in I$ και $\alpha(I)$ περιέχεται στην ευθεία $\alpha(t_0) + tu$.

2.2 Αναπαραμέτρηση καμπύλης

Όπως είδαμε διαφορετικές καμπύλες μπορεί να έχουν την ίδια εικόνα. Θα εξετάσουμε τώρα πως σχετίζονται αυτές μεταξύ τους. Υπενθυμίζουμε ότι μια απεικόνιση $h : I \to J$ λέγεται αμφιδιαφόριση αν είναι 1-1, επί, διαφορίσιμη και η αντίστροφή της h^{-1} είναι επίσης διαφορίσιμη.

Ορισμός. *Αν $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ είναι μία καμπύλη και $h : J \to I$ είναι αμφιδιαφόριση τότε η καμπύλη $\beta : J \to \mathbb{R}^3$, $\beta(t) = \alpha(h(t))$ λέγεται* ***αναπαραμέτρηση*** *της α.*

Υπάρχει μια αναπαραμέτρηση που διευκολύνει τη μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων μιας καμπύλης. Αυτή είναι η αναπαραμέτρηση για την οποία το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό ίσο με 1.

Έστω $\alpha : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη. Η συνάρτηση **μήκος τόξου** της α ορίζεται με

$$s(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\|\, du$$

Πρόταση 2.1. *Αν $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ είναι μία κανονική καμπύλη τότε η α έχει αναπαραμέτρηση $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας ($\|\beta'(t)\| = 1$ για κάθε $t \in J$).*

Απόδειξη. Έστω $I = [c, d]$ και $L = L(\alpha)$. Έχουμε

$$s : [c, d] \to [0, L],\ \ s(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\|\, du$$

$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ αφού η α είναι κανονική. Επομένως η s είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι 1-1. Συμπεραίνουμε ότι η s είναι αντιστρέψιμη και αν $h = s^{-1}$ τότε

$$h'(t) = \frac{1}{s'(h(t))}$$

Αφού η α είναι ομαλή βλέπουμε εύκολα ότι η s είναι διαφορίσιμη. Ισχύει επίσης ότι η αντίστροφη μιας C^∞ συνάρτησης είναι C^∞, άρα και η h είναι διαφορίσιμη.

Ορίζουμε τώρα αναπαραμέτρηση της α με

$$\beta(s) = \alpha(h(s)),\ s \in [0, L]$$

Έχουμε

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = s'(h(s))\frac{1}{s'(h(s))} = 1$$

□

Η παραμέτρηση β του προηγούμενο θεωρήματος λέγεται **παραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου**. Το μήκος τόξου λέγεται επίσης και **φυσική** παράμετρος. Μία καμπύλη α τέτοια ώστε $\|\alpha'(t)\| = 1$ για κάθε t λέγεται **καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας**.

Παράδειγμα 2.10. *Βρείτε την αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου του κύκλου ακτίνας r: $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$.*

Παρατηρούμε ότι $\|\alpha'(t)\| = r$ επομένως η αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου είναι

$$\beta : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2,\ \ \beta(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r))$$

Παράδειγμα 2.11. *Βρείτε την αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου της καμπύλης $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, \sqrt{3}t)$.*

$\alpha'(t) = (1, \sqrt{t}, \sqrt{3})$, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{t+4}$ Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μήκος τόξου ξεκινώντας απ' το 0:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{u+4}\, du = [\frac{2}{3}(u+4)^{3/2}]_0^t = \frac{2}{3}(t+4)^{3/2} - \frac{16}{3}$$

Λύνουμε ως προς t:

$$(t+4)^{3/2} = (\frac{3s}{2} + 8) \Rightarrow t = (\frac{3s}{2} + 8)^{2/3} - 4$$

Και η αναπαραμέτρηση ως προς μήκος τόξου δίνεται από

$$\beta(s) = \alpha((\frac{s}{2} + 8)^{2/3} - 4)$$

2.3 Εξωτερικό γινόμενο

Αν $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ το εξωτερικό γινόμενο των u, v ορίζεται με

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3, -u_1v_3 + v_1u_3, u_1v_2 - v_1u_2)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $u \times v = -v \times u$
2. $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$
3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $u \times v = 0$ ανν τα u, v είναι γραμμικά εξαρτημένα.
5. $< u \times v, v >= 0$, $< u \times v, u >= 0$
6. Αν $\|u\| = \|v\| = 1$, $u \perp v$ και $w = u \times v$ τότε $\|w\| = 1$ και $w \times u = v$, $v \times w = u$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες 1-4 έπονται εύκολα από τον ορισμό.

Για την ιδιότητα 5 παρατηρούμε ότι αν $a = (a_1, a_2, a_3)$ τότε

$$< a, u \times v >= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

άρα $< u \times v, v >= 0$, $< u \times v, u >= 0$.

Για την ιδιότητα 6 θέτουμε $w = (x, y, z)$ και με υπολογισμό έχουμε

$$< w, w >= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$=< u, u >< v, v > - < u, v >^2 = 1$$

Παρατηρούμε ότι $w \times u \perp u$, $w \times u \perp w$ επομένως το $w \times u$ είναι συγγραμικό με το v.

Απ΄ την άλλη

$$1 =< w, w >= \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =< v, w \times u >$$

άρα $w = v$.

$\square$

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση $f \times g$ είναι διαφορίσιμη και με υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$(f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

δηλ. ο συνήθης κανόνας για την παραγώγιση γινομένου συναρτήσεων ισχύει και για το εξωτερικό γινόμενο.

2.4 Καμπυλότητα, Τρίεδρο Frenet

Λήμμα. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη. Τότε η $\|f'(t)\|$ είναι σταθερή στο (a, b) ανν $< f(t), f'(t) >= 0$ για κάθε t στο (a, b).*

Απόδειξη. $\|f'(t)\|$ είναι σταθερή ανν η $\|f'(t)\|^2 =< f(t), f(t) >$ είναι σταθερή. Αλλά η $< f(t), f(t) >$ είναι σταθερή ανν

$$< f(t), f(t) >' = 0 \Leftrightarrow < f'(t), f(t) > + < f(t), f'(t) >= 2 < f(t), f'(t) >= 0$$

□

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε καμπύλες παραμετρημένες με μήκος τόξου καθώς αυτή η παραμέτρηση κάνει απλούστερο τον υπολογισμό των γεωμετρικών μεγεθών της καμπύλης.

Ορισμός. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με $\|\alpha'(s)\| = 1$ για κάθε $s \in I$. Ο αριθμός $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ ονομάζεται καμπυλότητα της α στο s.*

Παρατηρούμε ότι αφού $\|\alpha'(s)\|$ είναι σταθερό από το προηγούμενο λήμμα $< \alpha'(s), \alpha''(s) >= 0$ δηλ. $\alpha'(s) \perp \alpha''(s)$. Επομένως η καμπυλότητα, $k(s)$, μας λέει πόσο πολύ 'στρίβει' η καμπύλη στο s.

Παράδειγμα 2.12. *Αν α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τέτοια ώστε $k(s) = 0$ για κάθε s τότε $\alpha''(s) = 0$ για κάθε s, επομένως, όπως είδαμε νωρίτερα, η α περιέχεται σε μία ευθεία.*

Το τρίεδρο του Frenet αποτελείται από 3 κάθετα μοναδιαία διανύσματα που κινούνται πάνω στην καμπύλη και μας δίνουν ένα 'βολικό' σύστημα συντεταγμένων. Το πρώτο διάνυσμα αυτού του τριέδρου είναι το

$$T(s) = \alpha'(s)$$

Αν $k(s) = 0$ λέμε ότι το σημείο s είναι *ιδιάζον σημείο τάξης 1.* Αν $k(s) \neq 0$ ορίζουμε

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} \quad \textbf{πρώτο κάθετο διάνυσμα}$$

και

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad \textbf{δεύτερο κάθετο διάνυσμα}$$

Από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου έχουμε ότι

$$B(s) \perp T(s), \quad B(s) \perp N(s)$$

Το επίπεδο που ορίζουν τα $T(s), N(s)$ και περνά από το $\alpha(s)$ λέγεται **εγγύτατο επίπεδο** της α στο $\alpha(s)$.

Η τριάδα $\{T, N, B\}$ λέγεται **τρίεδρο του Frenet κατά μήκος της** α

Εξετάζουμε τώρα πως μεταβάλεται το τρίεδρο του Frenet πάνω στην καμπύλη, υπολογίζουμε δηλαδή τις παραγώγους: $\{T', N', B'\}$.

Έξ ορισμού έχουμε $T'(s) = k(s)N(s)$.

$N'(s)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $T(s), N(s), B(s)$. Αφού η $N(s)$ είναι σταθερή $N'(s) \perp N(s)$. Επομένως έχουμε $N'(s) = aT(s) + bB(s)$.

Υπολογίζουμε το a:

$$< T(s), N(s) >= 0 \Rightarrow < T'(s), N(s) > + < T(s), N'(s) >= 0 \Rightarrow < T(s), N'(s) >= -k(s)$$

Ορίζουμε τώρα $\tau(s) =< N'(s), B(s) >$. Ο πραγματικός αριθμός $\tau(s)$ ονομάζεται **στρέψη** της α στο s.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$. Υπολογίζουμε τώρα το $B'(s)$:

$$< B(s), B(s) >= 1 \Rightarrow < B'(s), B(s) >= 0 \Rightarrow B'(s) \perp B(s)$$

$$< B(s), T(s) >= 0 \Rightarrow < B'(s), T(s) > + < B(s), T'(s) >= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < B'(s), T(s) > + < B(s), k(s)N(s) >= 0 \Rightarrow < B'(s), T(s) >= 0$$

$$< B(s), N(s) >= 0 \Rightarrow < B'(s), N(s) > + < B(s), N'(s) >= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < B'(s), N(s) > + < B(s), -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) >= 0 \Rightarrow < B'(s), N(s) >= -\tau(s)$$

Άρα $B'(s) = -\tau(s)N(s)$

Συνοψίζοντας έχουμε:

Τύποι του Frenet

$$T'(s) = k(s)N(s)$$
$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$
$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

Παράδειγμα 2.13. *Θεωρούμε την κυκλική έλικα:*

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \ t \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ b \neq 0$$

ι) Βρείτε την αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου της α.

ιι) Βρείτε την καμπυλότητα και την στρέψη και υπολογίστε το τρίεδρο του Frenet της καμπύλης.

ι) Θεωρούμε τη συνάρτηση μήκος τόξου:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = t\sqrt{a^2+b^2}$$

άρα $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ Θέτουμε $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Η αναπαραμέτρηση της α με μήκος τόξου είναι:

$$\beta(s) = (a\cos(s/c), a\sin(s/c), bs/c)$$

ιι)

$$T(s) = \beta'(s) = (-\frac{a}{c}\sin(s/c), \frac{a}{c}\cos(s/c), b/c)$$

$$T'(s) = (-\frac{a}{c^2}\cos(s/c), \frac{a}{c^2}\sin(s/c), 0)$$

Υπολογίζουμε την καμπυλότητα:

$$k(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}\cos^2(s/c) + \frac{a^2}{c^4}\sin^2(s/c)} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$N(s) = (-\cos(s/c), \sin(s/c), 0)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{1}{c}(b\sin(s/c), -b\cos(s/c), a)$$

$$B'(s) = \frac{1}{c^2}(b\cos(s/c), b\sin(s/c), a) = -\frac{b}{c^2}N(s)$$

Επομένως $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Πρόταση 2.2. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ μία κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Αν $k(s) \neq 0$ για κάθε $s \in I$ τότε $\tau(s) = 0$ για κάθε $s \in I$ ανν η α είναι επίπεδη.*

Απόδειξη. Αν η α είναι επίπεδη τότε $T(s), N(s)$ βρίσκονται σε ένα επίπεδο παράλληλο με το επίπεδο που περιέχει την α άρα $B(s)$ είναι σταθερό και $\tau(s) = 0$ για κάθε $s \in I$.

Αντίστροφα θα δείξουμε ότι αν $\tau = 0$ τότε $B(s) = B$ σταθερό και η $\alpha(s)$ ανήκει σε ένα επίπεδο κάθετο στο B.

Πράγματι

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) = 0$$

άρα $B(s)$ είναι σταθερό ίσο με ένα διάνυσμα B.

Έστω $s_0 \in I$. Για να δείξουμε ότι η α ανήκει σε ένα επίπεδο κάθετο στο B αρκεί να δείξουμε ότι

$$< \alpha(s) - \alpha(s_0), B >= 0, \quad \forall s \in I$$

Παραγωγίζουμε:

$$< \alpha(s) - \alpha(s_0), B >' = < \alpha(s)', B > = < T(s), B >= 0$$

άρα $< \alpha(s) - \alpha(s_0), B >$ είναι σταθερό. Αλλά για $s = s_0$ είναι ίσο με 0, άρα $< \alpha(s) - \alpha(s_0), B >= 0$ για κάθε $s \in I$ και η α είναι επίπεδη. □

Πρόταση 2.3. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ μία επίπεδη κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε η α περιέχεται σε ένα κύκλο αν και μόνο αν η καμπυλότητα $k(s)$ είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\alpha(s)$ περιέχεται σε κύκλο. Τότε

$$\alpha(s) = (r\cos(s/r) + x_0, r\sin(x/r) + y_0)$$

$$T(s) = \alpha'(s) = (-\sin(s/r), \cos(x/r))$$

$$T'(s) = \frac{1}{r}(-cos(s/r), \sin(x/r))$$

άρα $k(s) = \frac{1}{r}$ σταθερή.

Αντίστροφα, έστω ότι η καμπυλότητα είναι σταθερή, $k(s) = k$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε την

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}N(s)$$

Τότε

$$\beta'(s) = T(s) + \frac{1}{k}(-kT(s)) = 0$$

Επομένως η $\beta(s)$ είναι σταθερή, $\beta(s) = (x_0, y_0)$ και

$$\|\alpha(s) - (x_0, y_0)\| = \|\alpha(s) - \beta(s)\| = \|\frac{1}{k}N(s)\| = \frac{1}{k}$$

άρα η $\alpha(s)$ περιέχεται στον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα $\frac{1}{k}$.

□

Παράδειγμα 2.14. *(Εξετάσεις Σεπτ. 2006) Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με αντίστοιχο τρίεδρο Frenet T, N, B τέτοιο ώστε για $s \in I$ το διάνυσμα*

$$\sin(2s)T(s) + \cos(2s)N(s) + B(s)$$

να είναι σταθερό. Να δείξετε ότι η γ είναι τμήμα κύκλου την ακτίνα του οποίου να προσδιορίσετε.

Λύση

Παραγωγίζουμε:

$$(\sin(2s)T(s) + \cos(2s)N(s) + B(s))' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cos(2s) - k(s)\cos(2s))T(s) + (\sin(2s)k(s) - 2\sin(2s) - \tau(s))N(s) + \cos(2s)\tau(s)B(s) = 0$$

αφού τα $T(s), N(s), B(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε

$$2\cos(2s) - k(s)\cos(2s) = 0\ ,\ \sin(2s)k(s) - 2\sin(2s) - \tau(s) = 0\ ,\ \cos(2s)\tau(s) = 0$$

Απ' την τελευταία ισότητα παίρνουμε $\tau(s) = 0$ άρα η γ είναι επίπεδη. Από την πρώτη ισότητα έχουμε $k(s) = 2$, άρα η γ είναι τμήμα κύκλου ακτίνας $r = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{2}$.

□

Άσκηση 2.2. *Έστω $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τέτοια ώστε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο $\beta(s)$ περνά από σταθερό σημείο $p \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι η β είναι ευθεία.*

Απόδειξη. Η εφαπτομένη στο σημείο $\beta(s)$ δίνεται από $\beta(s) + t\beta'(s)$. Αφού το p ανήκει σ' αυτή την ευθεία για κάθε s υπάρχει $f(s)$ τέτοιο ώστε $p = \beta(s) + f(s)\beta'(s)$.

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(s)$ είναι C^∞. Έχουμε

$$f(s)\beta'(s) = p - \beta(s) \Rightarrow f(s) = < p - \beta(s), \beta'(s) >$$

άρα η $f(s)$ είναι C^∞ αφού η $\beta(s)$ είναι C^∞.

Παραγωγίζουμε τώρα τη σχέση: $p = \beta(s) + f(s)\beta'(s)$ και έχουμε

$$0 = T(s) + f'(s)T(s) + f(s)k(s)N(s) \Rightarrow 1 + f'(s) = 0 \text{ και } f(s)k(s) = 0$$

άρα $f'(s) = -1$ και $f(s) = s + c$. Αφού $f(s)k(s) = 0$ έχουμε ότι $k(s) = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$ άρα η β είναι ευθεία. □

Άσκηση 2.3. *Έστω $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξετε ότι η β είναι τμήμα κύκλου αν και μόνο αν όλες οι ευθείες που περιέχουν τα κάθετα διανύσματα της β περνούν από σταθερό σημείο.*

Άσκηση 2.4. *Έστω $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξετε ότι οι ευθείες που περιέχουν τα διανύσματα $B(s)$ δεν μπορούν να περνάνε από σταθερό σημείο.*

Άσκηση 2.5. *Έστω $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τέτοια ώστε $k(s) \neq 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η α είναι επίπεδη αν και μόνο αν όλα τα εγγύτατα επίπεδα της α περνούν από σταθερό σημείο P.*

Λύση

Προφανώς αν η α είναι επίπεδη όλα τα εγγύτατα επίπεδα της α περνούν από σταθερό σημείο.

Αντίστροφα έχουμε ότι για κάθε s υπάρχουν $f(s), g(s) \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P = \alpha(s) + f(s)T(s) + g(s)N(s)$. Έχουμε

$$f(s) =< P - \alpha(s), T(s) >, \quad g(s) =< P - \alpha(s), N(s) >$$

άρα οι $f(s), g(s)$ είναι C^∞.

Παραγωγίζουμε:

$$(\alpha(s) + f(s)T(s) + g(s)N(s))' = 0 \Rightarrow$$

$$T(s)+f'(s)T(s)+f(s)k(s)N(s)+g'(s)N(s)-k(s)g(s)T(s)+\tau(s)g(s)B(s) = 0$$

άρα αφού τα $T(s), N(s), B(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$1 + f'(s) - k(s)g(s) = 0$$

$$f(s)k(s) + g'(s) = 0$$

$$\tau(s)g(s) = 0$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\tau(s) = 0$ για κάθε s. Πράγματι αν $\tau(s) \neq 0$ για κάποιο s τότε η τ δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$. Από την τρίτη εξίσωση έχουμε ότι $g(t) = 0$ για κάθε $t \in (s - \epsilon, s + \epsilon)$. Επομένως $g'(t) = 0$. Αφού $k(t) \neq 0$ από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $f(t) = 0$ για κάθε $t \in (s - \epsilon, s + \epsilon)$. Αλλά τότε από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $1 = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως $\tau(s) = 0$ για κάθε s, άρα η α είναι επίπεδη.

□

Άσκηση 2.6. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ κανονική επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Δείξτε ότι η καμπυλότητα της α δίνεται από τον τύπο*

$$k = |x'y'' - x''y'|$$

2.5 Καμπυλότητα, στρέψη και Τρίεδρο Frenet τυχαίας καμπύλης

Έστω $\alpha(t)$ κανονική καμπύλη. Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της α, $\beta(s)$. Ορίζουμε την καμπυλότητα, τη στρέψη και το τρίεδρο *Frenet* της καμπύλης α στο σημείο $\alpha(t)$ να είναι αντίστοιχα η καμπυλότητα, η στρέψη και το τρίεδρο *Frenet* της καμπύλης β στο σημείο $\beta(s(t))$, όπου $s(t)$ είναι η συνάρτηση μήκος τόξου.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα δόσουμε τύπους υπολογισμού αυτών των μεγεθών από την α, χωρίς δηλαδή να χρειάζεται να υπολογίσουμε την αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου της α.

Πρόταση 2.4. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη. Η καμπυλότητα της α στο σημείο $\alpha(t)$ δίνεται από τον τύπο:*

$$k = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Αν $k > 0$ στο σημείο $\alpha(t)$ τότε η στρέψη και τα διανύσματα του τριέδρου Frenet της α στο σημείο $\alpha(t)$ δίνονται από τους τύπους:

$$\tau = \frac{< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$N = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|\|\alpha'(t)\|}$$

$$B = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

Απόδειξη. Έστω $\beta(s)$ η αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου της α. Αν $s(t)$ είναι η συνάρτηση μήκος τόξου της α έχουμε:

$$\alpha(t) = \beta(s(t)) \Rightarrow \alpha'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = s'(t)T(s(t))$$

και

$$\alpha''(t) = T'(s(t))s'(t)^2 + s''(t)T(s(t)) = s''(t)T(s(t)) + k(s(t))s'(t)^2N(s(t))$$

υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = s'(t)T(s(t)) \times (s''(t)T(s(t)) + k(s(t))s'(t)^2N(s(t)) =$$

$$= k(s(t))s'(t)^3B(s(t))$$

Αλλά $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ επομένως έχουμε:

$$k = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό στη συνέχεια θέτουμε $v = s'(t)$.
Για την στρέψη υπολογίζουμε την τρίτη παράγωγο $\alpha'''(t)$:

$$\alpha'''(t) = (v'' - k(s(t))^2v^3)T(s(t)) + (v'vk(s(t)) + (k(s(t))v^2)')N(s(t)) +$$

$$+\tau(s(t))k(s(t))v^3B(s(t))$$

Αφού τα $T(s(t)), N(s(t)), B(s(t))$ είναι κάθετα ανά δύο έχουμε:

$$< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >= \tau(s(t))k(s(t))^2 v^6$$

Επίσης

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = k(s(t))v^3$$

άρα

$$\tau = \frac{< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Υπολογίζουμε τώρα τα διανύσματα του τριέδρου $Frenet$:

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Αφού

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = k(s(t))s'(t)^3 B(s(t))$$

έχουμε

$$B = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $N = B \times T$, και $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = v^3 k(s(t))B$ άρα

$$(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t) = v^4 k(s(t))N(s(t))$$

Επίσης

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = v^3 k(s(t)), \;\; \|\alpha'(t)\| = v$$

Επομένως

$$N = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \|\alpha'(t)\|}$$

□

Υπολογίζουμε τώρα τις παραγώγους των T, N, B:

Πρόταση 2.5. *Έστω $\alpha(t)$ κανονική καμπύλη θετικής καμπυλότητας και έστω $\{T, N, B\}$ το τρίεδρο Frenet της α. Οι παράγωγοι των T, N, B δίνονται από*

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau vB$$

$$B' = -\tau vN$$

όπου v είναι η ταχύτητα της α.

Απόδειξη. Αν $s(t)$ είναι η συνάρτηση μήκος τόξου της α έχουμε:

$$T' = T(s(t))' = v(t)T'(s(t)) = vkN$$

$$N' = N(s(t))' = v(t)N'(s(t)) = -kvT + \tau vB$$

$$B' = B(s(t))' = v(t)B'(s(t)) = \tau vN$$

□

Παράδειγμα 2.15. *Υπολογίστε την καμπυλότητα, τη στρέψη και το τρίεδρο Frenet της καμπύλης:*

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$\alpha''(t) = 6(-t, 1, t)$$

$$\alpha'''(t) = 6(-1, 0, 1)$$

και

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = 18(t^2 - 1, -2t, 1 + t^2)$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 18\sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2 + (t^2+1)^2} = 18\sqrt{2}(t^2+1)$$

$$\|\alpha'(t)\| = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

επομένως

$$k = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

$$\tau = \frac{< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{216}{18^2(1+t^2)^2} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$N = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{(1+t^2)^2}(-2t(1+t^2), (1-t^2)(1+t^2), 0) =$$

$$= \frac{1}{1+t^2}(-2t, 1 - t^2, 0)$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}, 1)$$

□

2.6 Κανονική μορφή καμπύλης

Πρόταση 2.6. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τέτοια ώστε $\alpha(0) = 0$. Τότε έχουμε*

$$\alpha(s) = (s - \frac{k_0^2}{6}s^3)T(0) + (\frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k_0'}{6}s^3)N(0) + \frac{k_0\tau_0}{6}s^3B(0) + \epsilon(s)s^3$$

όπου $k_0 = k(0), \tau_0 = \tau(0), k_0' = k'(0)$ και $\lim_{s\to 0}\|\epsilon(s)\| = 0$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα $Taylor$ έχουμε:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{1}{2}s^2\alpha''(0) + \frac{1}{6}s^3\alpha'''(0) + s^3\epsilon(s)$$

όπου $\lim_{s\to 0}\|\epsilon(s)\| = 0$.

Υπολογίζουμε:

$$\alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = T(0),\ \ \alpha''(0) = k_0N(0)$$

και

$$\alpha'''(0) = k_0'N(0) - k_0^2T(0) + k_0\tau_0B(0)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\alpha(s) = (s - \frac{k_0^2}{6}s^3)T(0) + (\frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k_0'}{6}s^3)N(0) + \frac{k_0\tau_0}{6}s^3B(0) + \epsilon(s)s^3$$

□

Γενικότερα από τον τύπο του $Taylor$ στο s_0 έπεται ότι

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + ((s - s_0) - \frac{k(s_0)^2}{6}(s - s_0)^3)T(s_0) +$$
$$+(\frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + \frac{k'(s_0)}{6}(s - s_0)^3)N(s_0) +$$
$$+\frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3B(s_0) + \epsilon(s)(s - s_0)^3$$

όπου τώρα

$$\lim_{s\to s_0}\|\epsilon(s)\| = 0$$

Αυτή η ανάπτυξη της $\alpha(s)$ λέγεται **κανονική μορφή της καμπύλης** α **στο** s_0.

Όπως έχουμε πεί το επίπεδο που ορίζεται από τα $T(s_0), N(s_0)$ και περνά από το $\alpha(s_0)$ ονομάζεται **εγγύτατο επίπεδο** της α στο $\alpha(s_0)$. Από τα διανύσματα του τριέδρου του $Frenet$ ορίζονται άλλα δύο επίπεδα στο $\alpha(s_0)$, το **κάθετο επίπεδο** που ορίζουν τα δύο κάθετα διανύσματα $N(s_0), B(s_0)$ και το **ευθειοποιούν επίπεδο** που ορίζουν τα $T(s_0), B(s_0)$.

Θεωρούμε τώρα τις προβολές της καμπύλης α σ' αυτά τα τρία επίπεδα στο σημείο $\alpha(s_0)$, θέτουμε $s - s_0 = h$, $s = s_0 + h$:

Προβολή στο εγγύτατο επίπεδο:

$$\alpha_1(s_0 + h) = (h, \frac{k(s_0)}{2}h^2) + \delta_1(h)h^2$$

Προβολή στο κάθετο επίπεδο:

$$\alpha_2(s_0 + h) = (h, \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}h^3) + (\delta_2(h)h^2, \delta_3(h)h^3)$$

Προβολή στο ευθειοποιούν επίπεδο:

$$\alpha_3(s_0 + h) = (h^2, \frac{\sqrt{2}k(s_0)}{3\sqrt[3]{\tau(s_0)}}h^3) + \delta_4(h)h^3$$

όπου

$$\lim_{h\to 0} \|\delta_1(h)\| = \lim_{h\to 0} \delta_2(h) = \lim_{h\to 0} \delta_3(h) = \lim_{h\to 0} \|\delta_4(h)\| = 0$$

Από αυτές τις παραστάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ποιά είναι η προβολή της α στα 3 επίπεδα καθώς και ποιά είναι η σχέση της ως προς αυτά 'κοντά' στο s_0.

Από την α_1 συμπεραίνουμε ότι η προβολή στο T, N επίπεδο μοιάζει με παραβολή. Επίσης βλέπουμε ότι η καμπύλη εφάπτεται στο B, T επίπεδο στο $\alpha(s_0)$ και βρίσκεται στην ίδια πλευρά όπως το N.

Από την α_2 συμπεραίνουμε ότι η προβολή στο T, B επίπεδο μοιάζει με γράφημα εξίσωσης 3ου βαθμού. Η α_2 διασχίζει το T, N επίπεδο και το τέμνει μόνο στο $\alpha(s_0)$. Όμοια η α_2 διασχίζει το B, N επίπεδο και το τέμνει μόνο στο $\alpha(s_0)$.

Από την α_2 συμπεραίνουμε ότι η προβολή στο N, B επίπεδο μοιάζει με το γράφημα της εξίσωσης $y^2 = x^3$.

Ορισμός. *Λέμε ότι δύο καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας α, β εφάπτονται στο σημείο $p = \alpha(s) = \beta(s)$ αν $\alpha'(s) = \pm\beta'(s)$. Λέμε ότι το σημείο p των $\alpha(s), \beta(s)$ είναι εφαπτόμενο σημείο τάξης k αν $\|\alpha(s+h) - \beta(s+h)\| \leq \epsilon(h)h^k$ όπου $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.*

Ορισμός. *Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Ο **εγγύτατος κύκλος** της α στο $p = \alpha(s)$ είναι ο κύκλος που βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο της $\alpha(s)$ και έχει κέντρο το σημείο*

$$O = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$$

και ακτίνα

$$\frac{1}{k(s)}$$

Πρόταση 2.7. *Ο εγγύτατος κύκλος της α στο $p = \alpha(s)$ εφάπτεται στην α στο p. Το p είναι εφαπτόμενο σημείο τάξης 2 της α και του εγγύτατου κύκλου.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\|O - p\| = \frac{1}{k(s)}$ άρα το p ανήκει στον εγγύτατο κύκλο. Επίσης $O - p = \frac{1}{k(s)}N(s)$ άρα η εφαπτομένη του κύκλου στο p είναι κάθετη στο $N(s)$, άρα είναι παράλληλη στο $T(s)$. Επομένως ο εγγύτατος κύκλος εφάπτεται στην α. Θεωρούμε τώρα την πραμέτρηση με μήκος τόξου του εγγύτατου κύκλου, ας πούμε $\gamma(s)$ και παρατηρούμε ότι η στρέψη του είναι 0 ενώ η καμπυλότητα του είναι σταθερή ίση με $\frac{1}{k(s)}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\gamma'(s) = T(s)$. Πράγματι αν $\gamma'(s) = -T(s)$ θεωρούμε την παραμέτρηση με αντίστροφη φορά $\gamma_1(s) = \gamma(-s)$ για την οποία έχουμε $\gamma_1'(s) = -\gamma'(s) = T(s)$.

Θεωρούμε τώρα την κανονική μορφή της α στο s:

$$\alpha(s+h) = \alpha(s) + (h - \frac{k(s)^2}{6}h^3)T(s) +$$

$$+(\frac{k(s)}{2}h^2 + \frac{k'(s)}{6}h^3)N(s) +$$

$$+\frac{k(s)\tau(s)}{6}h^3B(s) + \epsilon_1(h)h^3$$

Η κανονική μορφή του εγγύτατου κύκλου γ δίνεται από:

$$\gamma(s+h) = \gamma(s) + (h - \frac{k(s)^2}{6}h^3)T(s) +$$

$$+(\frac{k(s)}{2}h^2)N(s) + \epsilon_2(h)h^3$$

Επομένως

$$\|\alpha(s+h) - \gamma(s+h)\| =$$

$$= \|\frac{k'(s)}{6}h^3N(s) + \frac{k(s)\tau(s)}{6}h^3B(s) + \epsilon_1(h)h^3 - \epsilon_2(h)h^3\| =$$

$$= h^2(\|h(\frac{k'(s)}{6}N(s) + \frac{k(s)\tau(s)}{6}B(s) + \epsilon_1(h) - \epsilon_2(h))\|)$$

Συμπεραίνουμε ότι το $\alpha(s)$ είναι εφαπτόμενο σημείο τάξης 2 της καμπύλης α και του εγγύτατου κύκλου της στο $\alpha(s)$. □

Παρατηρούμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο $\alpha(s)$ δίνεται από $L(t) = \alpha(s) + tT(s)$. Επομένως

$$\alpha(s+h) - L(h) = \frac{k(s)}{2}h^2N(s) + \delta(h)h^2$$

Συμπεραίνουμε ότι αν $k(s) \neq 0$ το σημείο $\alpha(s)$ είναι εφαπτόμενο σημείο τάξης 1 αλλά δεν είναι εφαπτόμενο σημείο τάξης 2. Με άλλα λόγια ο εγγύτατος κύκλος μας δίνει κοντά στο $\alpha(s)$ καλύτερη προσέγγιση της καμπύλης απ΄ ότι η εφαπτομένη.

Η επόμενη πρόταση δικαιολογεί την ονομασία εγγύτατο επίπεδο για το επίπεδο που ορίζεται από τα T, N.

Πρόταση 2.8. *Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, $P=\alpha(s)$ και $k(s)\neq 0$. Θεωρούμε το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $P, Q=\alpha(s+h_1), R=\alpha(s+h_2)$.*

ι)Δείξτε ότι αυτό το επίπεδο συγκλίνει στο εγγύτατο επίπεδο καθώς $h_1, h_2 \to 0$.

ιι)Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία $P, Q=\alpha(s+h_1), R=\alpha(s+h_2)$. Δείξτε ότι αυτός ο κύκλος συγκλίνει στον εγγύτατο κύκλο της α στο $\alpha(s)$ καθώς $h_1, h_2 \to 0$.

Απόδειξη. ι) Παρατηρούμε ότι αν τα h_1, h_2 είναι αρκετά μικρά τότε τα σημεία P, Q, R δεν είναι συνευθειακά. Όντως η προβολή της α στο εγγύτατο επίπεδο δίνεται από

$$\alpha_1(s+h)=(h, \frac{k(s)}{2}h^2+\delta_1(h)h^2)$$

το γράφημα της οποίας μοιάζει με παραβολή αφού $k(s)>0$. Επίσης $P=\alpha_1(s)$ ενώ οι προβολές των Q, R είναι διαφορετικές από το P, επομένως τα σημεία P, Q, R δεν είναι συνευθειακά, άρα ορίζουν επίπεδο. Έστω $A(h_1,h_2)$ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σ' αυτό το επίπεδο. Θα δείξουμε ότι καθώς τα $h_1, h_2 \to 0$ το $A(h_1,h_2)$ πλησιάζει στο $\pm B(s)$ επομένως τα επίπεδα που ορίζονται από τα P, Q, R συγκλίνουν στο εγγύτατο επίπεδο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $F(u)=<A(h_1,h_2),\alpha(u)>$. Προφανώς

$$F(s)=F(s+h_1)=F(s+h_2)=0$$

Από το Θ. Rolle υπάρχουν η_1, η_2 τέτοια ώστε $F'(\eta_1)=0, F'(\eta_2)=0$. Πάλι από το Θ. Rolle υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $F''(\xi)=0$. Παρατηρούμε ότι καθώς τα $h_1, h_2 \to 0$ τα $\eta_1, \eta_2, \xi \to s$. Έχουμε επομένως

$$F'(\eta_1)=<A(h_1,h_2),\alpha'(\eta_1)>=F''(\xi)=<A(h_1,h_2),\alpha''(\xi)>=0$$

Αλλά τα $\alpha'(\eta_1), \alpha''(\xi)$ συγκλίνουν αντίστοιχα στα διανύσματα $T(s), kN(s)$ καθώς τα $h_1, h_2 \to 0$. Επομένως το $A(h_1,h_2)$ συγκλίνει σε ένα διάνυσμα κάθετο σ' αυτά τα δύο διανύσματα, άρα συγκλίνει στο $\pm B(s)$, επομένως τα επίπεδα συγκλίνουν στο εγγύτατο επίπεδο.

ιι) Ο κύκλος που ορίζουν τα σημεία P, Q, R βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν αυτά τα σημεία. Αφού αυτά τα επίπεδα συγκλίνουν στο εγγύτατο επίπεδο και αυτοί οι κύκλοι συγκλίνουν στο εγγύτατο επίπεδο. Έστω $C(h_1,h_2)$ το κέντρο του κύκλου που περιέχει τα P, Q, R. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(u)=<\alpha(u)-C(h_1,h_2),\alpha(u)-C(h_1,h_2)>$$

Παρατηρούμε ότι

$$G(s)=G(s+h_1)=G(s+h_2)=0$$

Από το Θ. Rolle υπάρχουν η_1, η_2 τέτοια ώστε $G'(\eta_1)=0, G'(\eta_2)=0$. Πάλι από το Θ. Rolle υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $G''(\xi)=0$. Παρατηρούμε ότι καθώς τα $h_1, h_2 \to 0$ τα $\eta_1, \eta_2, \xi \to 0$.

Θεωρούμε τώρα την παράγωγο της G:

$$G'(u) = 2 < \alpha'(u), \alpha(u) - C(h_1, h_2) >$$

Επομένως

$$0 = G'(\eta_1) = 2 < \alpha'(\eta_1), \alpha(\eta_1) - C(h_1, h_2) >$$

Καθώς τα $h_1, h_2 \to 0$, $\eta_1 \to s$ και $\alpha'(\eta_1) \to T(s)$. Συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $\alpha(\eta_1) - C(h_1, h_2)$ συγκλίνουν σε ένα διάνυσμα κάθετο με το $T(s)$ καθώς τα $h_1, h_2 \to 0$ και $u \to s$. Θεωρούμε τώρα τη δεύτερη παράγωγο της G:

$$G''(u) = 2 < \alpha''(u), \alpha(u) - C(h_1, h_2) > +2 < \alpha'(u), \alpha'(u) >$$

Έχουμε

$$0 = G''(\xi) = 2 < \alpha''(\xi), \alpha(\xi) - C(h_1, h_2) > +2 < \alpha'(\xi), \alpha'(\xi) >$$

Τώρα

$$< \alpha'(\xi), \alpha'(\xi) >= 1$$

και

$$\alpha''(\xi) = k(\xi)N(\xi)$$

Καθώς τα h_1, h_2 συγκλίνουν στο 0 το $\alpha''(\xi)$ συγκλίνει στο $k(s)N(s)$ και το $C(h_1, h_2)$ συγκλίνει σε ένα σημείο C στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης και από την παραπάνω ισότητα στο όριο παίρνουμε:

$$0 =< k(s)N(s), \alpha(s) - C > +1 \Rightarrow < N(s), \alpha(s) - C >= -\frac{1}{k(s)}$$

Αφού τα διανύσματα $N(s), \alpha(s) - C$ είναι συνευθειακά έχουμε ότι

$$\alpha(s) - C = -\frac{1}{k(s)}N(s) \Rightarrow C = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$$

δηλαδή ο κύκλος που παίρνουμε στο όριο είναι ο εγγύτατος κύκλος της α στο s. □

Άσκηση 2.7. *Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και μη μηδενικής καμπυλότητας τέτοια ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\alpha'(s) = T(s)$ είναι κάθετο σε σταθερό διάνυσμα w για κάθε s. Δείξτε ότι η α είναι επίπεδη.*

2.7 Επίπεδες Καμπύλες

Θα μελετήσουμε τώρα πιο αναλυτικά τις επίπεδες καμπύλες. Θα δούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση μπορεί κανείς να δόσει ένα πρόσημο $\pm$ στην καμπυλότητα και να θεωρήσει την προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης. Τέλος θα δείξουμε το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των επίπεδων καμπυλών που λέει ότι η προσημασμένη καμπυλότητα προσδιορίζει πλήρως μία επίπεδη καμπύλη.

Αν e_1 ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο υπάρχουν ακριβώς 2 μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο e_1. Αν e_2 είναι το κάθετο διάνυσμα που παίρνουμε στρίβοντας το e_1 κατά $\pi/2$ αντίστροφα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού λέμε ότι η διατεταγμένη βάση (e_1, e_2) είναι θετικά προσανατολισμένη. Αντίστοιχα η βάση $(e_1, -e_2)$ είναι αρνητικά προσανατολισμένη (επίσης η (e_2, e_1) είναι αρνητικά προσανατολισμένη).

Ορισμός. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη μαναδιαίας ταχύτητας και έστω $T(t)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της α. Ορίζουμε $N_*(t)$ να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $T(t)$ έτσι ώστε η βάση $(T(t), N_*(t))$ να είναι θετικά προσανατολισμένη. Η παράγωγος $T'(t)$ είναι κάθετη στο $T(t)$, επομένως $T'(t) = k_*(t)N_*(t)$ για κάποιο $k_*(t) \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $k_*(t)$ ονομάζεται* ***προσημασμένη ή επίπεδη καμπυλότητα*** *της α.*

Παρατηρούμε ότι $k_*(t) = k(t)$ αν η βάση $(T(t), N(t))$ είναι θετικά προσανατολισμένη και $k_*(t) = -k(t)$ αν η βάση $(T(t), N(t))$ είναι αρνητικά προσανατολισμένη (όπου $k(t), N(t)$ είναι αντίστοιχα η καμπυλότητα και το πρώτο κάθετο διάνυσμα της α). Παρατηρούμε επίσης ότι αν $T(t) = (a, b)$ τότε $N_*(t) = (-b, a)$.

Πρόταση 2.9. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε η προσημασμένη καμπυλότητα της α δίνεται από τον τύπο*

$$k_*(t) = \alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)$$

Απόδειξη.

$$T(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$$
$$\alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t))$$
$$N_*(t) = (-\alpha_2'(t), \alpha_1'(t))$$

και τέλος

$$k_*(t) =< \alpha''(t), N_*(t) >= \alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)$$

□

Γενικότερα αν β είναι τυχαία επίπεδη καμπύλη, $s(t)$ είναι η συνάρτηση μήκος τόξου της β και $\beta(t) = \alpha(s(t))$ η αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της β τότε έχουμε:

$$\beta'(t) = s'(t)\alpha'(s(t)) = s'(t)T(t)$$
$$\beta''(t) = s''(t)\alpha'(s(t)) + s'(t)^2\alpha''(s(t)) = s''(t)T(t) + s'(t)^2\alpha''(s(t))$$
$$< \beta''(t), N_*(t) >= s'(t)^2 k_*(t)$$

Αντικαθιστώντας

$$N_*(t) = \frac{1}{s'(t)}(-\beta_2'(t), \beta_1'(t))$$

έχουμε

$$k_*(t) = \frac{\beta_1'(t)\beta_2''(t) - \beta_2'(t)\beta_1''(t)}{\|\beta'(t)\|^3}$$

Παρατηρούμε ότι αν α τυχαία επίπεδη καμπύλη με προσημασμένη καμπυλότητα k_*^α και β αναπαραμέτρηση της α με αντίθετο προσανατολισμό, δηλ. $\beta(t) = \alpha(c - t)$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ τότε η προσημασμένη καμπυλότητα της β, k_*^β έχει αντίθετο πρόσημο από την k_*^α, δηλ.

$$k_*^\beta(t) = -k_*^\alpha(t)$$

Πράγματι αυτό έπεται με υπολογισμό από τους παραπάνω τύπους για την προσημασμένη καμπυλότητα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε γεωμετρικά ότι μετά την αναπαραμέτρηση η φορά του $T(t)$ αντιστρέφεται ενώ το $N(t)$ μένει σταθερό. Επομένως ο προσανατολισμός της $(T(s), N(s))$ αλλάζει.

Ορισμός. *Μία* ***στερεά κίνηση*** *στο επίπεδο είναι μία απεικόνιση $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τ.ω. $M = R_\theta \circ \mu_c$ όπου η R_θ είναι στροφή γωνίας θ και η μ_c είναι μεταφορά κατά το διάνυσμα c.*

Υπενθυμίζουμε ότι

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

και αν $c = (c_1, c_2)$ τότε

$$\mu_c(x, y) = (x, y) + c = (x + c_1, y + c_2)$$

Πρόταση 2.10. *Έστω α επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και M στερεά κίνηση του επιπέδου. Θεωρούμε την καμπύλη $\beta(s) = M \circ \alpha(s)$. Τότε η προσημασμένη καμπυλότητα της β είναι ίση με την προσημασμένη καμπυλότητα της α.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$. Αν $M = R_\theta$ τότε

$$\beta(s) = (\alpha_1(s)\cos\theta - \alpha_2(s)\sin\theta, \alpha_1(s)\sin\theta + \alpha_2(s)\cos\theta)$$

και η προσημασμένη καμπυλότητα της β δίνεται από

$$k_*^\beta(t) = (\alpha_1'(s)\cos\theta - \alpha_2'(s)\sin\theta)(\alpha_1''(s)\sin\theta + \alpha_2''(s)\cos\theta) -$$

$$-(\alpha_1'(s)\sin\theta + \alpha_2'(s)\cos\theta)(\alpha_1''(s)\cos\theta - \alpha_2''(s)\sin\theta) =$$

$$= \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)$$

Όμοια αν M είναι μεταφορά η προσημασμένη καμπυλότητα δεν αλλάζει. Αφού κάθε στερεά κίνηση είναι σύνθεση μεταφοράς με στροφή η προσημασμένη καμπυλότητα δεν αλλάζει από στερεά κίνηση. $\square$

Πρόταση 2.11. *Έστω α επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και έστω $\theta(s)$ η γωνία που σχηματίζουν τα $T(s), e_1$. Αν $k_*(s)$ είναι η προσημασμένη καμπυλότητα της α, ισχύει ότι*

$$k_*(s) = \theta'(s)$$

Απόδειξη. $T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ όπου η $\theta(s)$ είναι διαφορίσιμη.

$$N_*(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$$

$$k_*(s) =< T'(s), N_*(s) >=$$

$$=< (-\theta'(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s)), (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) >=$$

$$= \theta'(s)(\sin^2\theta(s) + \cos^2\theta(s)) = \theta'(s)$$

□

Θεώρημα. ***(Θεμελιώδες Θεώρημα επίπεδων καμπυλών)***

ι) Έστω $k_* : [0,a] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma : [0,a] \to \mathbb{R}^2$ τ.ω. η k_* είναι η επίπεδη καμπυλότητα της γ.

ιι) Αν $\beta : [0,a] \to \mathbb{R}^2$ είναι επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. η k_* είναι η επίπεδη καμπυλότητα της β τότε υπάρχει στερεά κίνηση M τ.ω. $\beta(s) = M \circ \gamma(s)$.

Απόδειξη. ι) Θέτουμε

$$\phi(s) = \int_0^s k_*(u)\,du$$

$$\gamma(s) = (\int_0^s \cos\phi(t)\,dt, \int_0^s \sin\phi(t)\,dt)$$

Τότε

$$T(s) = \gamma'(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία $\phi(s)$ με τον άξονα των x. Επομένως η γ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και από την πρόταση 2.11 η επίπεδη καμπυλότητα της γ είναι ίση με $\phi'(s) = k_*(s)$.

ιι) Έστω M στερεά κίνηση τ.ω. $M(\beta(0)) = \gamma(0)$ και $M(\beta'(0)) = \gamma'(0)$. Έστω $\tilde{T}(s) = (M \circ \beta)'(s)$ Αν $\theta(s)$ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\tilde{T}(s)$ με τον άξονα των x τότε

$$\theta(s) = \int_0^s k_*(u)\,du$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{T}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

Αφού $\theta(s) = \phi(s)$ έχουμε $T(s) = \tilde{T}(s)$ για κάθε s. Αλλά $\gamma(0) = M(\beta(0))$, επομένως $\gamma(s) = M(\beta(s))$ για κάθε s. □

2.8 Θεμελιώδες Θεώρημα των καμπυλών

Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των διατεταγμένων βάσεων του $\mathbb{R}^3$. Λέμε ότι οι βάσεις (v_1, v_2, v_3) και (w_1, w_2, w_3) είναι ισοδύναμες αν ο πίνακας αλλαγής βάσης έχει θετική ορίζουσα. Προφανώς αυτή η σχέση είναι αυτοπαθής συμμετρική και μεταβατική, επομένως είναι σχέση ισοδυναμίας. Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων βάσεων σε 2 κλάσεις ισοδυναμίας.

Έστω

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Λέμε ότι μία βάση (v_1, v_2, v_3) είναι **θετικά προσανατολισμένη** αν ο πίνακας αλλαγής βάσης από την (e_1, e_2, e_3) στην (v_1, v_2, v_3) έχει θετική ορίζουσα. Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης που ορίζεται με $T(e_1) = v_1, T(e_2) = v_2, T(e_3) = v_3$, είναι λοιπόν ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα v_1, v_2, v_3.

Λήμμα. *Έστω u, v γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε η διατεταγμένη βάση $(u, v, u \times v)$ είναι θετικά προσανατολισμένη.*

Απόδειξη. Έστω $u = (a_1, a_2, a_3)$, $v = (b_1, b_2, b_3)$. Τότε

$$u \times v = (a_2 b_3 - a_3 b_2, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

και η ορίζουσα του πίνακα αλλαγής βάσης απ' την κανονική βάση στην $(u, v, u \times v)$ είναι:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_2 & b_2 & b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (b_1 a_3 - a_1 b_3)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 > 0$$

□

Ορισμός. *Μία στερεά κίνηση του $\mathbb{R}^3$ είναι μια απεικόνιση της μορφής $\mu \circ T$ όπου ο T είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του οποίου ο πίνακας έχει θετική ορίζουσα και ο μ είναι μεταφορά.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι μία γραμμική απεικόνιση που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλ. $< Tv, Tw >=< v, w >$ για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^3$. Ο πίνακας του T είναι ένας ορθογώνιος πίνακας A, δηλ. ισχύει ότι $A^t A = I_n$. Ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3$ του οποίου η ορίζουσα είναι θετική (άρα ίση με 1) είναι στροφή γύρω από κάποιο άξονα.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι μία στερεά κίνηση διατηρεί την καμπυλότητα και τη στρέψη μιάς καμπύλης:

Πρόταση 2.12. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη και έστω $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ στερεά κίνηση. Τότε η καμπυλότητα και η στρέψη της $M \circ \alpha$ είναι ίση με την καμπυλότητα και την στρέψη της α.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η α είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Είναι προφανές ότι η πρόταση ισχύει αν η M είναι μεταφορά. Έστω τώρα ότι η M είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Θέτουμε $\beta(s) = M(\alpha(s))$. Τότε

$$M(\alpha(s))' = M(\alpha'(s))$$

αφού η M είναι γραμμική. Επίσης αφού M ορθογώνιος

$$\|M(v)\| = \|v\|$$

για κάθε v, επομένως

$$\|\beta'(s)\| = \|M(\alpha(s))'\| = \|M(\alpha'(s))\| = \|\alpha'(s)\| = 1$$

άρα η $\beta(s)$ είναι επίσης καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Αν $T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, T_\beta, N_\beta, B_\beta$ είναι αντίστοιχα τα τρίεδρα *Frenet* των α, β τότε έχουμε:

$$\beta'(s) = T_\beta(s) = M(T_\alpha(s))$$

και

$$k_\beta(s) = \|T'_\beta(s)\| = \|M(T'_\alpha(s))\| = \|T'_\alpha(s)\| = k_\alpha(s)$$

όπου k_β, k_α είναι αντίστοιχα οι καμπυλότητες των α, β. Επίσης

$$N_\beta = M(N_\alpha)$$

Όμοια

$$B_\beta = M(B_\alpha) \Rightarrow B'_\beta(s) = M(B'_\alpha(s)) \Rightarrow \tau_\beta(s)N_\beta(s) = \tau_\alpha(s)M(N_\alpha(s))$$

άρα $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$ (όπου τ_β, τ_α είναι η στρέψεις των β, α αντίστοιχα). □

Θα εξετάσουμε τώρα πως μεταβάλεται η καμπυλότητα, η στρέψη και το τρίεδρο *Frenet* μιας καμπύλης από αναπαραμέτρηση της καμπύλης.

Ορισμός. *Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη και $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ $\beta = \alpha \circ h$ αναπαραμέτρηση της α. Λέμε ότι οι α, β έχουν τον ίδιο προσανατολισμό αν $h'(t) > 0$ για κάθε $t \in J$. Αν $h'(t) < 0$ για κάθε $t \in J$ λέμε ότι οι α, β έχουν αντίθετο προσανατολισμό.*

Παρατηρούμε ότι αν β είναι η αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της ομαλής καμπύλης α τότε $\beta = \alpha \circ s$ όπου s είναι η συνρτηση μήκος τόξου και $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ άρα οι α, β έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Παρατηρούμε επίσης ότι το τρίεδρο *Frenet*, η καμπυλότητα και η στρέψη μίας κανονικής καμπύλης ορίζονται μέσω της αναπαραμέτρησης μοναδιαίας ταχύτητας της καμπύλης. Για να δούμε λοιπόν πως μεταβάλονται αυτά τα μεγέθη αρκεί να περιοριστούμε σε καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας.

Έστω λοιπόν $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Η α έχει μόνο μία αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας την $\beta(t) = \alpha(L-t)$, $\beta : [0, L] \to \mathbb{R}^3$.

Συμβολίζουμε με $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ τα διανύσματα του τριέδρου $Frenet$ της β και με T, N, B τα αντίστοιχα διανύσματα της α. Έχουμε:

$$T_\beta(t) = \beta'(t) = -\alpha'(L-t) = -T(L-t)$$

επομένως η φορά του εφαπτόμενου διανύσματος αντιστρέφεται.

$$N_\beta(t) = \frac{T'_\beta(t)}{\|T'_\beta(t)\|} = \frac{-T'(L-t)}{\|-T'(L-t)\|} = N(L-t)$$

δηλαδή το πρώτο κάθετο διάνυσμα μένει αμετάβλητο. Τέλος

$$B_\beta(t) = T_\beta(t) \times N_\beta(t) = -B(L-t)$$

δηλ. το δεύτερο κάθετο διάνυσμα αλλάζει κατεύθυνση.

Έστω k_β, τ_β η καμπυλότητα και η στρέψη της β και k, t η καμπυλότητα και η στρέψη της α.

Για την καμπυλότητα έχουμε:

$$k_\beta(t) = \|T'_\beta(t)\| = \|-T'(L-t)\| = \|T'(L-t)\| = k(L-t)$$

δηλαδή η καμπυλότητα δεν μεταβάλεται.

Υπολογίζουμε τώρα τη στρέψη:

$$B'_\beta(t) = -\tau_\beta(t) N_\beta(t) = -\tau_\beta(t) N(L-t)$$

και

$$B'_\beta(t) = (-B(L-t))' = B'(L-t) = -\tau(L-t)N(L-t)$$

άρα

$$\tau_\beta(t) = \tau(L-t)$$

άρα και η στρέψη δεν μεταβάλεται.

Θεώρημα. ***(Θεμελιώδες θεώρημα καμπυλών)*** *Έστω $k : [0, c] \to (0, \infty)$, $\tau : [0, c] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε υπάρχει καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\alpha : [0, c] \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε η καμπυλότητα της α είναι η k και η στρέψη της α είναι η τ. Επίσης αν β είναι μία άλλη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα k και στρέψη τ τότε η β προκύπτει από την α με στερεά κίνηση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την μοναδικότητα. Για την απόδειξη της ύπαρξης παραπέμπουμε στις σημειώσεις Βασιλείου-Παπατριανταφύλλου.

Έστω λοιπόν $\alpha : [0, c] \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα k και στρέψη τ. Συμολίζουμε με T, N, B τα διανύσματα του τριέδρου $Frenet$

της α. Έστω $\beta : [0, c] \to \mathbb{R}^3$ μία άλλη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα και στρέψη επίσης ίση με k, τ. Έστω $s_0 \in (0, c)$. Παρατηρούμε ότι με στερεά κίνηση μπορούμε να ταυτίσουμε το $\beta(s_0)$ με το $\alpha(s_0)$ όπως επίσης και τα διανύσματα του τριέδρου *Frenet* της β στο s_0 με τα $T(s_0), N(s_0), B(s_0)$. Σημειώνουμε ότι αυτό ισχύει επειδή και τα 2 τρίεδρα είναι θετικά προσανατολισμένα.

Υποθέτω λοιπόν ότι $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ και ότι τα διανύσματα του τριέδρου της β στο s_0 είναι τα $T(s_0), N(s_0), B(s_0)$.

Συμβολίζουμε με $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ τα διανύσματα του τριέδρου *Frenet* της β . Θα δείξουμε ότι

$$T_\beta(t) = T(t),\ N_\beta(t) = N(t),\ B_\beta(t) = B(t)$$

για κάθε $t \in [0, c]$.

Παραγωγίζουμε:

$$< T(t) - T_\beta(t), T(t) - T_\beta(t) >' = 2k(t) < N(t) - N_\beta(t), T(t) - T_\beta(t) >$$

$$< N(t) - N_\beta(t), N(t) - N_\beta(t) >' = -2k(t) < N(t) - N_\beta(t), T(t) - T_\beta(t) > +$$
$$+2\tau(t) < N(t) - N_\beta(t), B(t) - B_\beta(t) >$$

$$< B(t) - B_\beta(t), B(t) - B_\beta(t) >' = -2\tau(t) < N(t) - N_\beta(t), B(t) - B_\beta(t) >$$

Προσθέτοντας έχουμε

$$< T(t) - T_\beta(t), T(t) - T_\beta(t) >' + < N(t) - N_\beta(t), N(t) - N_\beta(t) >' +$$
$$+ < B(t) - B_\beta(t), B(t) - B_\beta(t) >' = 0$$

επομένως η συνάρτηση

$$f(t) = \|T(t) - T_\beta(t)\|^2 + \|N(t) - N_\beta(t)\|^2 + \|B(t) - B_\beta(t)\|^2$$

είναι σταθερή. Αλλά $f(s_0) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, c]$ και

$$T_\beta(t) = T(t),\ N_\beta(t) = N(t),\ B_\beta(t) = B(t)$$

για κάθε $t \in [0, c]$.

Θεωρούμε τώρα τη διαφορά $\gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Παρατηρούμε ότι

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) - \beta'(t) = T(t) - T_\beta(t) = 0$$

Επομένως η $\gamma(t)$ είναι σταθερή. Επίσης $\gamma(s_0) = 0$ άρα $\gamma(t) = 0$ για κάθε t και $\alpha = \beta$.

□

Ορισμός. *Οι εξισώσεις $k = k(s)$ και $\tau = \tau(s)$ που δίνουν την καμπυλότητα και τη στρέψη μιας καμπύλης ονομάζονται **φυσικές εξισώσεις** της καμπύλης.*

3 Επιφάνειες

3.1 Ορισμός επιφάνειας

Διαισθητικά μια επιφάνεια είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που τοπικά μοιάζει με το επίπεδο, μπορούμε δηλαδή να την κατασκευάσουμε παίρνοντας κομμάτια του επιπέδου λυγίζοντάς τα και κολλώντας τα μεταξύ τους. Σ' αυτό το μάθημα θα περιοριστούμε σε λείες επιφάνειες, δηλαδή επιφάνειες που δεν έχουν 'γωνίες' και που μπορούμε να μελετήσουμε χρησιμοποιώντας το διαφορικό λογισμό. Για παράδειγμα η σφαίρα είναι μία λεία επιφάνεια. Μπορούμε να την κατασκευάσουμε παίρνωντας 2 δίσκους του επιπέδου, στρεβλώνοντας τους κατάλληλα και 'κολώντας ' τους μεταξύ τους. Απ' την άλλη ο κώνος και ο κύβος δεν είναι λείες επιφάνειες, ο κώνος δεν είναι λείος στην κορυφή του και ο κύβος δεν είναι λείος στις ακμές και στις κορυφές του.

Υπενθυμίσουμε ότι μία απεικόνιση $f : U \to \mathbb{R}^k$, όπου U ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$, είναι τάξης C^1 αν όλες οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν και είναι συνεχείς. Μία C^1 απεικόνιση είναι διαφορίσιμη.

Ορισμός. *Ένας* ***χάρτης*** *είναι μία C^1 απεικόνιση $r : U \to \mathbb{R}^3$, όπου U είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. Η απεικόνιση $r : U \to r(U) = W$ είναι ομοιομορφισμός.

2. Για κάθε $a = (u, v) \in U$ το διαφορικό $Dr(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^3$ λέγεται ***κανονική επιφάνεια*** *αν υπάρχουν χάρτες $r_i : U_i \to \mathbb{R}^3$ $(i \in I)$ τέτοιοι ώστε $W_i = r_i(U_i)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο της S για κάθε i και*

$$S = \bigcup_{i \in I} W_i$$

Ένας χάρτης λέγεται επίσης και **παραμέτρηση επιφάνειας** η **2-διάστατο σύστημα συντεταγμένων**.

Παρατηρήσεις.

1. Ένα υποσύνολο U του $\mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό αν για κάθε $p \in U$ υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B_p(\epsilon) \subset U$. Για παράδειγμα το $U = \{(x, y) : x > 0\}$ είναι ανοιχτό ενώ το $B = \{(x, y) : x \geq 0\}$ δεν είναι ανοιχτό.

2. Μία απεικόνιση $f : U \to W$ είναι ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής, 1-1 και η αντίστροφη f^{-1} είναι επίσης συνεχής. Ένα παράδειγμα συνεχούς 1-1 και επί απεικόνισης που δεν είναι ομοιομορφισμός είναι η απεικόνιση

$$f : [0, 2\pi) \to S^1, \quad f(x) = (\cos x, \sin x)$$

όπου S^1 είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

3. Χρησιμοποιώντας συντεταγμένες η απεικόνιση r στον παραπάνω ορισμό δίνεται από

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Η δεύτερη συνθήκη του ορισμού είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ότι ο πίνακας *Jacobi* της γραμμικής απεικόνισης $Dr(a)$ έχει τάξη 2 για κάθε $a \in U$. Ο πίνακας *Jacobi* δίνεται από

$$J_a r = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a) & \frac{\partial x}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a) & \frac{\partial y}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(a) & \frac{\partial z}{\partial v}(a) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει τάξη 2 αν και μόνο αν τα διανύσματα των στηλών:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(a) = (\frac{\partial x}{\partial u}(a), \frac{\partial y}{\partial u}(a), \frac{\partial z}{\partial u}(a)), \quad \frac{\partial r}{\partial u}(a) = (\frac{\partial x}{\partial v}(a), \frac{\partial y}{\partial v}(a), \frac{\partial z}{\partial v}(a))$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\frac{\partial r}{\partial u}(a) \times \frac{\partial r}{\partial u}(a) \neq 0$$

Μπορούμε επίσης να δούμε αν ο πίνακας έχει τάξη 2 εξετάζοντας τις ορίζουσες

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a) & \frac{\partial x}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a) & \frac{\partial y}{\partial v}(a) \end{vmatrix} \; , \; \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} \; , \; \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

Ο πίνακας έχει τάξη δύο αν και μόνο αν τουλάχιστον μία απ΄ αυτές τις ορίζουσες είναι μη μηδενική.

Τα διανύσματα

$$\frac{\partial r}{\partial u}(a) = (\frac{\partial x}{\partial u}(a), \frac{\partial y}{\partial u}(a), \frac{\partial z}{\partial u}(a)), \quad \frac{\partial r}{\partial u}(a) = (\frac{\partial x}{\partial v}(a), \frac{\partial y}{\partial v}(a), \frac{\partial z}{\partial v}(a))$$

έχουν γεωμετρική σημασία που μπορούμε να δούμε ως εξής: Έστω $a = (u_0, v_0)$, θεωρούμε τις καμπύλες $\alpha(u) = r(u, v_0)$, $\beta(v) = r(u_0, v)$. Αυτές οι καμπύλες περιέχονται στην επιφάνεια $r(U)$ και

$$\alpha'(u_0) = \frac{\partial r}{\partial u}(a), \beta'(v_0) = \frac{\partial r}{\partial v}(a)$$

Δηλαδή αυτά τα διανύσματα εφάπτονται στις καμπύλες α, β στο σημείο a. Καθώς υποθέτουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα ορίζουν ένα επίπεδο που είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο a. Οι καμπύλες $\alpha(u) = r(u, v_0)$, $\beta(v) = r(u_0, v)$ ονομάζονται **καμπύλες συντεταγμένων** η **παραμετρικές καμπύλες** της επιφάνειας.

Παράδειγμα 3.1. *Αν $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό τότε το U είναι επιφάνεια.*

Πράγματι θα δείξουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $i : U \to \mathbb{R}^3$ είναι χάρτης. Έχουμε $i(u,v) = (u,v,0)$. Προφανώς η $i : U \to U$ είναι ομοιομορφισμός άρα η πρώτη συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται. Επίσης ο πίνακας $Jacobi$ του διαφορικού είναι ο

$$J_a i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

που έχει τάξη 2.

Παράδειγμα 3.2. ***Επίπεδα*** *Έστω* $S = \{(x,y,z) : ax+by+cz+d = 0\}$ *όπου* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Ας πούμε ότι $c \neq 0$. Ορίζουμε

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(x,y) = (x,y,-\frac{ax+by+d}{c})$$

Έχουμε $r(\mathbb{R}^2) = S$, η r είναι συνεχής και 1-1. Η αντίστροφη απεικόνιση $r^{-1} : S \to \mathbb{R}^2$ προκύπτει απ΄ τον περιορισμό της προβολής $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$ στο S. Αφού η π είναι συνεχής, η r^{-1} είναι επίσης συνεχής. Ο πίνακας $Jacobi$ του διαφορικού της r είναι ο

$$J_p r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

που έχει τάξη 2.

Επομένως η $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι χάρτης. Η S καλύπτεται από αυτό το χάρτη, επομένως είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.3. ***Γράφημα συνάρτησης*** *Έστω* $U \subset \mathbb{R}^2$ *ανοιχτό και* $f : U \to \mathbb{R}^3$, C^1 *συνάρτηση. Το γράφημα της* f *είναι το υποσύνολο του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in U\}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : U \to \mathbb{R}^3,\ \phi(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

Βλέπουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα ότι η $\phi : U \to S$ είναι ομοιομορφισμός και το διαφορικό της ϕ δίνεται από

$$J_p \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

η τάξη αυτού του πίνακα είναι 2 επομένως η $D\phi(p)$ είναι 1-1 για κάθε $p \in U$ άρα ο $\phi : U \to S$ είναι χάρτης και η S είναι ομαλή επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.4. ***Σφαίρα.*** $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα η σφαίρα είναι επιφάνεια που δεν καλύπτεται από μόνο ένα χάρτη.

Θεωρούμε τον ανοιχτό δίσκο $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Ορίζουμε

$$r_1 : U \to \mathbb{R}^3,\ r_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

Παρατηρούμε ότι ο r_1 είναι χάρτης και $r_1(U)$ καλύπτει το άνω ημισφαίριο. Ανάλογα ορίζουμε

$$r_2 : U \to \mathbb{R}^3,\ r_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$
$$r_3 : U \to \mathbb{R}^3,\ r_3(x, y) = (x, \sqrt{1 - x^2 - y^2}, y)$$
$$r_4 : U \to \mathbb{R}^3,\ r_4(x, y) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y)$$
$$r_5 : U \to \mathbb{R}^3,\ r_5(x, y) = (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$$
$$r_6 : U \to \mathbb{R}^3,\ r_6(x, y) = (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$$

Παρατηρούμε ότι

$$S^2 = \bigcup_{i=1..6} r_i(U)$$

επομένως η σφαίρα είναι κανονική επιφάνεια.

Μια άλλη παραμέτριση της σφαίρας δίνεται από τις σφαιρικές συντεταγμένες: Έστω

$$V = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$$

Ορίζουμε $f : V \to \mathbb{R}^3$ με

$$f(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

Προφανώς η f είναι διαφορίσιμη αφού $\cos, \sin$ είναι C^1. Εξετάζουμε τις ορίζουσες:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \end{vmatrix} = \cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix} = \sin^2\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix} = -\sin^2\theta\sin\phi$$

Παρατηρούμε ότι αυτές οι ορίζουσες μηδενίζονται ταυτόχρονα αν και μόνο αν μηδενίζεται το άθροισμα των τετραγώνων τους:

$$cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta \cos^2\phi + \sin^4\theta \sin^2\phi = \sin^2\theta$$

αλλά $\theta \in (0,\pi)$ άρα $\sin^2\theta \neq 0$. Επομένως το διαφορικό $Df(\theta,\phi)$ είναι 1-1. Επίσης αν $(x,y,z) = f(\theta,\phi)$ έχουμε $\cos\theta = z$, επομένως το θ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το z. Από τις $\sin\theta\cos\phi = x$, $\sin\theta\sin\phi = y$ προσδιορίζεται τώρα μονοσήμαντα και το ϕ. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι 1-1 και ορίζεται η αντίστροφη f^{-1}. Η αντίστροφη είναι συνεχής αφού οι $\arccos, \arcsin$ που χρησιμοποιούμε για τον ορισμό της f^{-1} είναι συνεχείς.

Παρατηρούμε τέλος ότι $f(V)$ καλύπτει όλη τη σφαίρα εκτός απ΄ το ημικύκλιο

$$C : (x,y,z) \in S^2 : y = 0, x \geq 0$$

Η S^2 μπορεί κα καλυφτεί εξ ολοκλήρου χρησιμοποιώντας άλλο ένα χάρτη της ίδιας μορφής πχ

$$g(\theta,\phi) = (\cos\theta, \sin\theta\sin\phi, -\sin\theta\cos\phi)$$

Παράδειγμα 3.5. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, r(x,y) = (x^3, y^3, 0)$. *Τότε* $r(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ *αλλά ο* r *δεν είναι χάρτης.*

Η r είναι διαφορίσιμη και ομοιομορφισμός επομένως ίκανοποιεί την πρώτη συνθήκη του ορισμού.

Αλλά

$$J_{(x,y)}r = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και αν $x = 0$ η $y = 0$ η τάξη του πίνακα είναι μικρότερη από 2, επομένως η δεύτερη συνθήκη του ορισμού δεν ικανοποιείται.

Όπως βλέπουμε η απόδειξη ότι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ είναι κανονική επιφάνεια με βάση τον ορισμό είναι αρκετά επίπονη. Θα δόσουμε παρακάτω ένα απλό κριτήριο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε πολλές περιπτώσεις. Υπενθυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1 αν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $(i = 1,..,k,\ j = 1,..,n)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Παρατηρούμε ότι τότε η f είναι διαφορίσιμη.

Για την απόδειξη του κριτηρίου αυτού χρειαζόμαστε το θεώρημα πεπελεγμένης συνάρτησης από το διαφορικό λογισμό:

Θεώρημα. *(Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης) Έστω* O *ανοιχτό σύνολο του* $\mathbb{R}^3$, $p = (x_0, y_0, z_0) \in O$, $c \in \mathbb{R}$ *και έστω* $f : U \to \mathbb{R}$, C^1 *συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι* $f(p) = c$ *και* $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. *Τότε υπάρχει μια ανοιχτή γειτονιά* U *του* (x_0, y_0) *στο* $\mathbb{R}^2$, *ένα ανοιχτό διάστημα* I *που περιέχει το* z_0 *και μιά* *διαφορίσιμη απεικόνιση $g : U \to I$ έτσι ώστε $U \times I \subset O$, $g(x_0, y_0) = z_0$ και για κάθε $(x, y, z) \in U \times I$ ισχύει ότι*

$$f(x, y, z) = c \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

Πρόταση 3.1. *Έστω $W \subset \mathbb{R}^3$ ανοιχτό και $f : W \to \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση. Έστω $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $p \in f^{-1}(c)$ το διαφορικό $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι επί. Τότε η $S = f^{-1}(c)$ είναι κανονική επιφάνεια.*

Απόδειξη. Το διαφορικό $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι επί αν και μόνο αν η τάξη του πίνακα *Jacobi* είναι 1. Έχουμε

$$J_p f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\Big)$$

Αρκεί λοιπόν κάποια από τις μερικές παραγώγους να είναι $\neq 0$. Έστω $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Από το Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \times I \subset W$ με $p = (x_0, y_0, z_0) \in U \times I$ και $g : U \to I$ διαφορίσιμη απεικόνιση με $g(x_0, y_0) = z_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(x, y, z) \in U \times I$ ισχύει ότι

$$f(x, y, z) = c \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

Ορίζουμε παραμέτρηση

$$r : U \to \mathbb{R}^3,\ r(x, y) = (x, y, g(x, y))$$

Έχουμε ότι $r(U)$ είναι γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης επομένως η απεικόνιση $r : U \to r(U) \cap f^{-1}(S)$ είναι χάρτης. Επίσης $p \in r(U)$. Αφού κάθε $p \in f^{-1}(c)$ καλύπτεται από ένα χάρτη αυτής της μορφής η $S = f^{-1}(c)$ είναι κανονική επιφάνεια. □

Εφαρμογές

1. Η σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Τότε για κάθε $p \in f^{-1}(1)$ το διαφορικό $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι επί. Επομένως η σφαίρα είναι κανονική επιφάνεια.

2. Όμοια βλέπουμε ότι οι επόμενες εξισώσεις ορίζουν κανονικές επιφάνειες:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{κύλινδρος}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{ελλειψοειδές}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{μονόχωνο υπερβολοειδές}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{δίχωνο υπερβολοειδές}$$

3.2 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Παραδείγματα επιφανειών παίρνουμε επίσης περιστρέφοντας μία επίπεδη κανονική απλή καμπύλη γύρω από ένα άξονα. Μία καμπύλη λέγεται απλή αν δεν αυτοτέμνεται. Πιο αυστηρά λέμε ότι η $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ είναι απλή αν για κάθε $p = \gamma(t)$ υπάρχει ανοιχτό $U \subset \mathbb{R}^2$ με $p \in U$ και $\epsilon > 0$ έτσι ώστε η απεινόνιση $\gamma : (t-\epsilon, t+\epsilon) \to \gamma(I) \cap U$ είναι ομοιομορφισμός.

Έστω λοιπόν

$$\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(u) = (f(u), 0, g(u)),\ f(u) > 0$$

Περιστρέφοντας την καμπύλη γ γύρω από τον άξονα των z παίρνουμε την επιφάνεια:

$$S = \{(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) : u \in (a,b),\ v \in [0, 2\pi)\}$$

Για να δείξουμε ότι η S ικανοποιεί τον ορισμό της κανονικής επιφάνειας περιοριζόμαστε στο ανοιχτό σύνολο $U = (a', b') \times (0, 2\pi)$ όπου η $\gamma : (a', b') \to \gamma(a', b')$ είναι ομοιομορφισμός και θεωρούμε την παραμέτρηση

$$r : U \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η r είναι συνεχής, 1-1, διαφορίσιμη. Επίσης η r^{-1} είναι συνεχής αφού αν $(x,y,z) \in r(U), (x,y,z) = r(u,v)$ έχουμε $v = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ αν $0 < x \leq \pi$, $v = 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ αν $2\pi > x \geq \pi$ και $u = \gamma^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)$ επομένως η r^{-1} είναι συνεχής σα σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Τέλος ο πίνακας *Jacobi* της r είναι ο

$$\begin{pmatrix} f'(u)\cos v & -f(u)\sin v \\ f'(u)\sin v & f(u)\cos v \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Αν $g'(u) \neq 0$ αφού $f(u) > 0$ οι δύο στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η r είναι 1-1. Αν $g'(u) = 0$ παρατηρούμε ότι $f'(u) \neq 0$ αφού $\gamma'(u) = \sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2} \neq 0$ άρα

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = f'(u)f(u) \neq 0$$

Μπορούμε να καλύψουμε την S με χάρτες αυτής της μορφής επομένως η S είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.6. ***Η σπείρα*** *Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο (a, o, o) και ακτίνα $r < a$ στο xz επίπεδο. Η κανονική επιφάνεια S που προκύπτει απ την περιστροφή του κύκλου γύρω από τον άξονα των z ονομάζεται σπείρα.*

Μία παραμέτρηση του κύκλου δίνεται από

$$\gamma(t) = (a + r\cos u, 0, r\sin u)$$

Επομένως μία παραμέτρηση της σπείρας δίνεται από

$$r(u, v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u) \; u \in [0, 2\pi), v \in [0, 2\pi)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε επίσης ότι

$$(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$$

Μπορούμε να δόσουμε μία διαφορετική απόδειξη ότι η σπείρα S είναι κανονική επιφάνεια ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(2y\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $S = f^{-1}(r)$ και για κάθε $p \in f^{-1}(r)$

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\Big) \neq (0, 0, 0)$$

Επομένως από την πρόταση 3.1 έχουμε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια.

3.3 Διαφορίσιμες απεικονίσεις

Ορισμός. *Μία απεικόνιση $f : U \to V$, όπου U, V είναι ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ λέγεται* ***αμφιδιαφόριση*** *αν η f είναι διαφορίσιμη, 1-1, επί και η αντίστροφη f^{-1} είναι επίσης διαφορίσιμη.*

Θέλουμε να γενικεύσουμε την έννοια της διαφορίσιμης συνάρτησης από το $\mathbb{R}^2$ γενικότερα σε συναρτήσεις που ορίζονται σε μία επιφάνεια. Υπάρχει ένας προφανής τρόπος να το κάνουμε αυτό. Αν $f : S \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, όπου S επιφάνεια και $a \in S$ τότε θεωρούμε μία παραμέτρηση της S, $r : U \to S$ τέτοια ώστε $a = r(b)$ και λέμε ότι η $f : S \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο a αν η $f \circ r : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο b. Ωστόσο δεν είναι ξεκάθαρο τι συμβαίνει αν αλλάξουμε παραμέτρηση, αν πχ $\phi : V \to S$ είναι μιά άλλη παραμέτρηση της S τέτοια ώστε $a = \phi(c)$ ισχύει ότι η $f \circ \phi$ είναι διαφορίσιμη στο c; Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η αλλαγή συντεταγμένων είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και ότι επομένως ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που διαλέγουμε.

Πρόταση 3.2. *(Αλλαγή συντεταγμένων) Έστω S κανονική επιφάνεια και $\phi : U \to S, \psi : V \to S$ δύο C^1 χάρτες της S. Αν $W = \phi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ τότε η απεικόνιση αλλάγής συντεταγμένων*

$$\psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(W) \to \psi^{-1}(W)$$

είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι η $h = \psi^{-1} \circ \phi$ είναι 1-1 και επί. Επίσης η αντίστροφη $\phi^{-1} \circ \psi$ είναι συνεχής επομένως η απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός. Θα δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. Το πρόβλημα είναι ότι η ψ^{-1} δεν ορίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ αλλά μόνο στην S. Θα δείξουμε λοιπόν ότι μπορούμε να επεκτείνουμε την ψ^{-1} σε μία διαφορίσιμη συνάρτηση που ορίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Έστω τυχαίο $p \in \phi^{-1}(W)$ και $q = h(p)$. Έστω ότι

$$\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Αφού το διαφορικό της ψ είναι 1-1 κάποια από τις 2×2 υποορίζουσες του πίνακα *Jacobi* στο p είναι $\neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$$

Ορίζουμε τώρα:

$$F : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

Ο πίνακας *Jacobi* της F στο $q \times \{0\}$ έχει ορίζουσα

$$J_q F = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$$

Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης υπάρχει μία ανοιχτή γειτονιά M του $\psi(q)$ στην οποία ορίζεται η αντίστροφη F^{-1} και είναι διαφορίσιμη. Αφού η ϕ είναι συνεχής υπάρχει μία γειτονιά N του p τ.ω. $\phi(N) \subset M$. Τώρα

$$h|_N = F^{-1} \circ \phi|_N$$

επομένως η h είναι διαφορίσιμη στο p σα σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $h^{-1} = \phi^{-1} \circ \psi$ είναι διαφορίσιμη.

□

Πρόταση 3.3. *Έστω S κανονική επιφάνεια και $r : U \to S$, C^1 απεικόνιση από ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε ότι η r είναι $1-1$ και το διαφορικό της r, $Dr(q)$, είναι 1-1 για κάθε $q \in U$. Τότε η r είναι χάρτης της S.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η r είναι χάρτης μένει να δείξουμε ότι η r^{-1} είναι συνεχής. Έστω $q \in U$ τυχαίο σημείο και $p = r(q)$. Έστω $\phi : V \to S$ χάρτης της S τ.ω. $p = \phi(q') \in \phi(V)$. Όπως στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης έχουμε ότι η ϕ^{-1} επεκτείνεται σε συνάρτηση $G : W \to \mathbb{R}^3$ όπου W είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το p και $DG(p)$ είναι 1-1. Έχουμε ότι $G = \phi^{-1}$ στο $W \cap \phi(V)$. Αφού η r είναι συνεχής μπορούμε να περιοριστούμε σε ένα ανοιχτό $A \subset U$ έτσι ώστε $r(A) \subset W$. Τότε η σύνθεση $\phi^{-1} \circ r = G \circ r$ ορίζεται στο A και $D(G \circ r)(q) = DG(p) \circ Dr(q)$ είναι 1-1. Επομένως από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης υπάρχει ανοιχτό $B \subset A$ με $q' \in B$ τ.ω. η $G \circ r = \phi \circ r : B \to \phi \circ r(B)$ είναι αμφιδιαφόριση. Αφού η ϕ είναι χάρτης το $\phi(B)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο της S που περιέχει το p. Τώρα

$$r^{-1}(a) = [(\phi \circ r)^{-1} \circ \phi^{-1}](a)$$

για κάθε $a \in \phi(B)$. Επομένως η r^{-1} είναι συνεχής σα σύνθεση συνεχών απεικονίσεων. □

Η παραπάνω πρόταση μας διευκολύνει όταν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι μία απεικόνιση $r : U \to \mathbb{S}$ είναι παραμέτρηση επιφάνειας στην περίπτωση που ξέρουμε ήδη ότι η S είναι κανονική επιφάνεια, μας λέει δηλ. ότι δε χρειάζεται να ελέγξουμε ότι η r^{-1} είναι συνεχής.

Ορισμός. *Έστω S κανονική επιφάνεια και $f : S \to \mathbb{R}$ απεικόνιση. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο p αν για κάποια παραμέτρηση της S, $r : U \to \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι $p = r(q), q \in U$ και η απεικόνιση $f \circ r : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο q. Η f λέγεται* ***διαφορίσιμη*** *αν είναι διαφορίσιμη για κάθε $p \in S$.*

Παρατήρηση. *Αν $r_1 : V \to \mathbb{R}^3$ είναι μιά άλλη παραμέτρηση της S με $p = r_1(q')$ τότε η απεικόνιση $f \circ r : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο q αν και μόνο αν η απεικόνιση $f \circ r_1 : V \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο q'. Με άλλα λόγια ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση που διαλέγουμε για την επιφάνεια S.*

Πράγματι από την πρόταση 3.2 αν $W = r(U) \cap r_1(V)$ η απεικόνιση $r_1^{-1} \circ r : r^{-1}(W) \to r_1^{-1}(W)$ είναι διαφορίσιμη. Επομένως αν η $f \circ r_1$ είναι διαφορίσιμη στο q' τότε η

$$(f \circ r_1) \circ (r_1^{-1} \circ r) = f \circ r$$

είναι διαφορίσιμη στο q. Και αντίστροφα αν η $f \circ r$ είναι διαφορίσιμη στο q η $f \circ r_1$ είναι διαφορίσιμη στο q'.

Παράδειγμα 3.7. *Έστω $f : S^2 \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση $(x, y, z) \longmapsto z$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $p = (0, 0, 1)$.*

Πράγματι θεωρούμε την παραμέτρηση $r : U \to \mathbb{R}^3, r(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ όπου U είναι ο ανοιχτός δίσκος $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Τότε $r(0, 0) = (0, 0, 1) = p$. Η απεικόνιση $f \circ r$ είναι η

$$f(r(u, v)) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

που είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Επομένως η f είναι διαφορίσιμη στο p. Όμοια βλέπουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο της S^2.

Όμοια ορίζουμε πότε μία συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}^n$ είναι **διαφορίσιμη**. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο p αν για κάποια παραμέτρηση της S, $r : U \to \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι $p = r(q), q \in U$ και η απεικόνιση $f \circ r : U \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο q.

Γενικότερα μπορούμε να ορίσουμε με όμοιο τρόπο διαφορίσιμες απεικονίσεις ανάμεσα σε κανονικές επιφάνειες:

Ορισμός. *Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες και $f : S_1 \to S_2$ απεικόνιση. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $p \in S_1$ αν υπάρχουν παραμετρήσεις $r_1 : U \to \mathbb{R}^3$ της S_1 και $r_2 : V \to \mathbb{R}^3$ της S_2 με $p = r_1(q) \in r_1(U)$ τέτοιες ώστε $f(r_1(U)) \subset r_2(V)$ και η απεικόνιση:*

$$F = r_2^{-1} \circ f \circ r_1 : U \to V$$

είναι διαφορίσιμη στο q. Αν η f είναι διαφορίσιμη για κάθε p λέμε ότι η f είναι ***διαφορίσιμη****.*

Μπορούμε να δούμε όπως πριν ότι αυτός ο ορισμός δεν εξαρτάται από τις παραμέτρησεις r_1, r_2 που διαλέγουμε.

Παράδειγμα 3.8. *Η απεικόνιση $f : S^2 \to S^2$, $f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$, όπου S^2 είναι η σφαίρα, είναι διαφορίσιμη.*

Έστω $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ τυχαίο σημείο της σφαίρας. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιο από τα x_0, y_0, z_0 είναι διάφορο του 0. Ας πούμε ότι $z_0 > 0$. Αν $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ ο μοναδιαίος δίσκος θεωρούμε τις παραμετρήσεις της S^2: $r_1 : U \to \mathbb{R}^3$, $r_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ και $r_2 : U \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$. Παρατηρούμε ότι $p \in r_1(U)$ και $f(r_1(U)) = r_2(U)$.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση: $F = r_2^{-1} \circ f \circ r_1 : U \to U$, $F(u,v) = (-u,-v)$ η οποία είναι διαφορίσιμη, άρα και η f είναι διαφορίσιμη. Η απόδειξη είναι όμοια αν $z_0 < 0$ η $z_0 = 0$ και κάποιο από τα x_0, y_0 είναι μη μηδενικό.

Πρόταση 3.4. *Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες και $V \subset \mathbb{R}^3$ ανοιχτό τ.ω. $S_1 \subset V$. Αν $f : V \to \mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και $f(S_1) \subset S_2$ τότε η απεικόνιση*

$$f|_{S_1} : S_1 \to S_2$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Πράγματι αν p τυχαίο σημείο της S_1 και $r_1 : U_1 \to S_1$, $r_2 : U_2 \to S_2$ παραμετρήσεις των S_1, S_2 με $q = r_1(p) \in U_1$ και $f(U_1) \subset U_2$ τότε από την παρατήρηση που ακολουθεί την πρόταση 3.2 έχουμε ότι η r_2^{-1} επεκτείνεται σε διαφορίσιμη συνάρτηση $G : W \to U_2$ όπου W ανοιχτό που περιέχει το $f(p)$. Επομένως η απεικόνιση

$$r_2^{-1} \circ f \circ r_1 : U_1 \to U_2$$

είναι ίση με την απεικόνιση

$$G \circ f \circ r_1$$

σε ένα ανοιχτό U_1' που περιέχει το q. Η τελευταία απεικόνιση είναι διαφορίσιμη σα σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων άρα και η

$$r_2^{-1} \circ f \circ r_1 : U_1 \to U_2$$

είναι διαφορίσιμη στο q. $\square$

Παράδειγμα 3.9. *Έστω*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

Προφανώς η f είναι διαφορίσιμη. Ο περιορισμός της f στην σφαίρα S^2 είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση από τη σφαίρα σε ένα ελλειψοειδές, όπου η σφαίρα είναι το σύνολο

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

και το ελλειψοειδές είναι το

$$E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

Πρόταση 3.5. *Έστω S_1, S_2, S_3 κανονικές επιφάνειες, $f : S_1 \to S_2$ διαφορίσιμη στο p και $g : S_2 \to S_3$ διαφορίσιμη στο $f(p)$ απεικονίσεις. Τότε η απεικόνιση $g \circ f : S_1 \to S_3$ είναι διαφορίσιμη στο p.*

Απόδειξη. Έστω $r_1 : V_1 \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση της S_1 τ.ω. $p = r_1(q_1) \in r_1(V_1)$, $r_2 : V_2 \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση της S_2 τ.ω. $f(p) = r_2(q_2) \in r_2(V_2)$ και $r_3 : V_3 \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση της S_3 τ.ω. $g(f(p)) \in r_3(V_3)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(V_2) \subset V_3$. Πράγματι η g είναι συνεχής επομένως υπάρχει ένα ανοιχτό A τ.ω. $f(p) \in A$ και $g(A) \subset V_3$. Μπορούμε επομένως να αντικαταστήσουμε την V_2 με $V_2 \cap r_2^{-1}A$ και να περιορίσουμε την r_2 σ' αυτό το σύνολο. Όμοια μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $r_1(V_1) \subset r_2(V_2)$. Τώρα έχουμε ότι η

$$r_2^{-1} \circ f \circ r_1 : V_1 \to V_2$$

είναι διαφορίσιμη στο q_1 και η

$$r_3^{-1} \circ g \circ r_2 : V_2 \to V_3$$

είναι διαφορίσιμη στο q_2. Επομένως η σύνθεσή τους

$$r_3^{-1} \circ (g \circ f) \circ r_1 : V_1 \to V_3$$

είναι διαφορίσιμη στο q_1. Από τον ορισμό της διαφορίσιμης συνάρτησης έχουμε ότι η $g \circ f : S_1 \to S_3$ είναι διαφορίσιμη στο p.

$\square$

Πρόταση 3.6. *Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες, $f : S_1 \to S_2$ απεικόνιση και $r : U \to S_1$ παραμέτρηση της S_1. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $p = r(q)$ αν και μόνο αν η*

$$r \circ f : U \to \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμη στο q.

Απόδειξη. Έστω $r_2 : V \to S_2$ παραμέτρηση της S_2 τ.ω. $f(p) = r_2(q') \in r_2(V)$. Όπως είδαμε στην πρόταση 3.2 υπάρχει μία ανοιχτή γειτονιά W του $f(p)$ στην οποία η r_2^{-1} επεκτείνεται σε διαφορίσιμη συνάρτηση $F : W \to \mathbb{R}^3$.

Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο p. Εξ ορισμού αυτό σημαίνει ότι η $r_2^{-1} \circ f \circ r$ είναι διαφορίσιμη στο q. Αλλά τότε η $f \circ r$ είναι διαφορίσμη στο q σα σύνθεση των διαφορίσιμων συναρτήσεων r_2 και $r_2^{-1} \circ f \circ r$.

Αντίστροφα έστω ότι η $f \circ r$ είναι διαφορίσιμη στο p. Τότε η $F \circ f \circ r$ είναι διαφορίσιμη στο p αφού η F είναι διαφορίσιμη στο W και $f(p) \in W$. Αλλά

$$F \circ f \circ r = r_2^{-1} \circ f \circ r$$

άρα η f είναι διαφορίσιμη στο p. □

3.4 Εφαπτόμενο επίπεδο

Έστω S κανονική επιφάνεια και $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη τέτοια ώστε $\alpha(I) \subset S$. Αν $t_0 \in I$ και $r : U \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση της S τ.ω. $\alpha(t_0) \in r(U)$ τότε για κάποιο $\epsilon > 0$, $\alpha(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset r(U)$. Παρατηρούμε τώρα ότι η απεικόνιση

$$r^{-1} \circ \alpha : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to U$$

ορίζει μία κανονική επίπεδη καμπύλη. Πράγματι όπως δείξαμε στην πρόταση 3.2 η απεικόνιση r^{-1} επεκτείνεται σε διαφορίσιμη απεικόνιση από ένα ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^3$. Επομένως η $r^{-1} \circ \alpha$ είναι διαφορίσιμη σα σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Έστω S κανονική επιφάνεια και p σημείο της S. Λέμε ότι ένα διάνυσμα v είναι *εφαπτόμενο διάνυσμα* της S στο p αν το v είναι διάνυσμα ταχύτητας κάποιας κανονικής καμπύλης $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ με $\alpha(0) = p$. Συμβολίζουμε το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο p με $\mathbb{E}_p$.

Πρόταση 3.7. *Έστω S κανονική επιφάνεια και $r : U \to \mathbb{R}^3$ με $p = r(q)$. Τότε ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}_p = Dr(q)(\mathbb{R}^2)$$

Απόδειξη. Έστω $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ κανονική καμπύλη με $\alpha(0) = p$. Η καμπύλη

$$\beta(t) = (r^{-1} \circ \alpha)(t)$$

είναι διαφορίσιμη επίπεδη καμπύλη στο V και $\alpha(t) = r \circ \beta(t)$. Έχουμε

$$\alpha'(0) = [D\alpha(0)](1) = [D(r \circ \beta)(0)](1) = Dr(q)(\beta'(0))$$

άρα $\alpha'(0)$ περιέχεται στην εικόνα του διαφορικού $Dr(q)$, επομένως $\mathbb{E}_p \subset Dr(q)(\mathbb{R}^2)$.

Αντίστροφα τώρα έστω $v \in \mathbb{R}^2$ και $w = [Dr(q)](v)$. Αν $r(q) = p$ θεωρούμε την καμπύλη $\beta(t) = q + tv$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ (όπου ϵ τ.ω. $\beta \subset U$). Η β είναι επίπεδη κανονική καμπύλη. Αν

$$\alpha(t) = r \circ \beta(t)$$

τότε

$$\alpha'(0) = (r \circ \beta)'(0) = [Dr(q)](\beta'(0)) = w$$

επομένως $Dr(q)(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}_p$ άρα $\mathbb{E}_p = Dr(q)(\mathbb{R}^2)$. □

Ορισμός. *Το επίπεδο $T_p(S) = \mathbb{E}_p = Dr(q)(\mathbb{R}^2)$ ονομάζεται* ***εφαπτόμενος χώρος*** *της S στο p. Το επίπεδο που περνά από το p και είναι παράλληλο στο επίπεδο $T_p(S) = Dr(q)(\mathbb{R}^2) = \mathbb{E}^2$ ονομάζεται* ***εφαπτόμενο επίπεδο*** *της S στο p.*

Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό του το εφαπτόμενο επίπεδο δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση r της S.

Υπολογισμός του εφαπτόμενου επιπέδου.

Έστω $r : U \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση της επιφάνειας S και $r(q) = p$. Τότε το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $Dr(q)(\mathbb{R}^2)$. Αν $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ η $Dr(q)$ είναι γραμμική απεικόνιση που δίνεται από τον πίνακα:

$$J_q r = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

επομένως το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα στηλών

$$\frac{\partial r}{\partial u}(q) = (\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q)), \quad \frac{\partial r}{\partial u}(q) = (\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q))$$

Έχουμε επίσης ότι ένα κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο είναι το:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(q) \times \frac{\partial r}{\partial u}(q)$$

Παράδειγμα 3.10. *Δίνεται η παραμέτρηση επιφάνειας $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $\phi(u,v) = (u, v, uv)$ και τα σημεία $q = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ και $p = \phi(q)$. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο p.*

$p = (1,2,2)$ και $\frac{\partial \phi}{\partial u} = (1,0,v)$, $\frac{\partial \phi}{\partial v} = (1,0,u)$ Επομένως

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(q) = (1,0,2), \ \frac{\partial \phi}{\partial v}(q) = (1,0,1)$$

Επομένως το εφαπτόμενο επίπεδο στο p είναι το

$$E = \{(1,2,2) + t(1,0,2) + s(1,0,1) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

3.5 Διαφορικό διαφορίσιμης απεικόνισης

Αν $f : U \to V$ διαφορίσιμη απεικόνιση από το $U \subset \mathbb{R}^n$ στο $V \subset \mathbb{R}^k$ τότε το διαφορικό της f σε ένα σημείο p είναι μία γραμμική απεινόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^k$. Αν $f : S_1 \to S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση από την επιφάνεια S_1 στην επιφάνεια S_2 θα ορίσουμε το διαφορικό T_pf της f σε ένα σημείο p να είναι μία γραμμική απεικόνιση από το εφαπτόμενο επίπεδο της S_1 στο p στο εφαπτόμενο επίπεδο της S_2 στο $f(p)$.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κάθε διάνυσμα v του εφαπτόμενου επιπέδου της S_1 στο p μπορούμε να το δούμε σα διάνυσμα ταχύτητας μιας διαφορίσιμης καμπύλης $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$, $v = \alpha'(0)$. Ορίζουμε λοιπόν $T_pf(v) = (f \circ \alpha)'(0)$. Για να έχει νόημα αυτός ο ορισμός μένει να δείξουμε ότι η σύνθεση $f \circ \alpha$ παριστά διαφορίσιμη καμπύλη στην S_2, ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την καμπύλη α αλλά μόνο από το v και ότι η απεικόνιση T_pf είναι γραμμική. Εξηγούμε γιατί ισχύουν όλα αυτά παρακάτω.

Λήμμα. *Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες και $f : S_1 \to S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη τότε η καμπύλη $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$ είναι επίσης διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$. Θεωρούμε $r_1 : U \to S_1$ παραμέτρηση της S_1 τ.ω. $p = \alpha(t_0) = r_1(q) \in r(U)$. Όπως δείξαμε στην πρόταση 3.2 η r_1^{-1} επεκτείνεται σε ένα ανοιχτό σύνολο W του $\mathbb{R}^3$ σε διαφορίσιμη απεικόνιση.

Επομένως η επίπεδη καμπύλη $\beta(t) = (r_1^{-1} \circ \alpha)(t)$ είναι διαφορίσιμη σα σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων και ορίζεται σε μία γειτονιά του t_0. Αν $r_2 : V \to S_2$ παραμέτρηση της S_2 τ.ω. $f(p) \in r_2(V)$ τότε έχουμε

$$f \circ \alpha = r_2 \circ (r_2^{-1} \circ f \circ r_1) \circ (r_1^{-1} \circ \alpha)$$

που είναι διαφορίσιμη σα σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. □

Ορισμός. *Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες, $p \in S_1$ και $f : S_1 \to S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση.* ***Το διαφορικό της*** f ***στο*** p*, είναι η απεικόνιση*

$$T_pf : T_p(S_1) \to T_{f(p)}(S_2),\ T_pf(v) = (f \circ \alpha)'(0)$$

όπου $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

Θεώρημα. *Το διαφορικό της f στο p είναι καλά ορισμένη, γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω $r_1 : U \to S_1$, $r_2 : V \to S_2$ παραμετρήσεις των S_1, S_2, $p = r_1(q_1), f(p) = r_2(q_2)$ και $\beta(t) = r_1^{-1} \circ \alpha(t)$ η επίπεδη διαφορίσιμη καμπύλη που προκύπτει από την α. Έστω α_1 μία άλλη διαφορίσιμη καμπύλη που περιέχεται στην S_1 τ.ω. $\alpha_1(0) = p$, $\alpha_1'(0) = v$. Ορίζουμε όμοια $\beta_1(t) = r_1^{-1} \circ \alpha_1(t)$ επίπεδη καμπύλη του U. Παρατηρούμε ότι

$$D(r_1 \circ \beta)(0) = \alpha'(0) \Rightarrow Dr_1(\beta'(0)) = v$$

και

$$D(r_1 \circ \beta_1)(0) = \alpha_1'(0) \Rightarrow Dr_1(\beta_1'(0)) = v$$

Αφού η $D(r_1)$ είναι 1-1 έχουμε ότι $\beta'(0) = \beta_1'(0)$.

Θέτουμε $F = r_2^{-1} \circ f \circ r_1$.

Έχουμε

$$(f \circ \alpha)'(0) = D(r_2 \circ (r_2^{-1} \circ f \circ r_1) \circ (r_1^{-1} \circ \alpha))(0) =$$

$$= Dr_2(q_2) \circ DF(q_1)(\beta'(0)) = Dr_2(q_2) \circ DF(q_1)(\beta_1'(0)) = (f \circ \alpha_1)'(0)$$

άρα ο ορισμός του $[T_p(S)](v)$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη α αλλά μόνο από το v, δηλαδή η απεικόνιση $T_p(S)$ είναι καλά ορισμένη.

Παρατηρούμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις

$$Dr_1(q_1) : \mathbb{R}^2 \to T_p(S_1)$$

$$Dr_2(q_2) : \mathbb{R}^2 \to T_{f(p)}(S_2)$$

είναι ισομορφισμοί. Άρα αν $v \in T_p(S_1)$ υπάρχει $w \in \mathbb{R}_2$ τ.ω. $v = [Dr_1(q_1)](w)$. Αν $\beta(t) = q_1 + tw$ καμπύλη στο U_1 και $\alpha = r_1 \circ \beta$ τότε

$$v = \alpha'(0) = [Dr_1(q_1)](\beta'(0) = [Dr_1(q_1)](w)$$

Τώρα έχουμε

$$T_p(f)(v) = (f \circ \alpha)'(0) = Dr_2(q_2) \circ DF(q_1)(w)$$

Αφού η $Dr_1(q_1)$ είναι ισομορφισμός έχουμε

$$w = Dr_1(q_1)^{-1}(v)$$

και

$$T_p(f)(v) = (f \circ \alpha)'(0) = Dr_2(q_2) \circ DF(q_1) \circ Dr_1(q_1)^{-1}(v)$$

Επομένως η $T_p f$ είναι γραμμική σα σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων.

□

Αν συμβολίσουμε με $< e_1, e_2 >$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε η βάση του $T_p(S_1)$ που αντιστοιχεί στην παραμέτρηση r_1 είναι η

$$< [D_p(r_1)](e_1), [D_p(r_1)](e_2) >=< r_{1u}, r_{1v} >$$

όπου

$$r_{1u} = \frac{\partial r_1}{\partial u}(q_1),\ r_{1v} = \frac{\partial r_1}{\partial v}(q_2)$$

Όμοια η βάση του $T_{f(p)}S_2$ που αντιστοιχεί στην παραμέτρηση r_2 είναι η

$$< [D_p(r_2)](e_1), [D_p(r_2)](e_2) >=< r_{2u}, r_{2v} >$$

Αφού
$$T_p(f) = Dr_2(q_2) \circ DF(q_1) \circ Dr_1(q_1)^{-1}$$
ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού $T_p(f)$ ως πρός τις βάσεις $< r_{1u}, r_{1v} >$ και $< r_{2u}, r_{2v} >$ είναι ίσος με τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού $DF(q_1)$ ως προς τη βάση $< e_1, e_2 >$. Με άλλα λόγια ο πίνακας της $T_p(f)$ ως πρός τις *standard* βάσεις των εφαπτόμενων χώρων είναι ο πίνακας *Jacobi* της απεικόνισης F στο q_1.

3.6 Πρώτη θεμελιώδης μορφή

Σ′ αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορεί κανείς να μετρήσει μήκη καμπυλών και εμβαδά πάνω σε μία επιφάνεια.

Αν V είναι διανυσματικός χώρος υπενθυμίζουμε ότι μία *διγραμμική μορφή* στον V είναι μία απεικόνιση $b : V \times V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v) = \lambda_1 b(v_1, v) + \lambda_2 b(v_2, v)$$

$$b(v, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 b(v, v_1) + \lambda_2 b(v, v_2)$$

για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $v, v_1, v_2 \in V$. Μία διγραμμική μορφή λέγεται *συμμετρική* αν $b(v, w) = b(w, v)$ για κάθε $v, w \in V$.

Ορισμός. *Μία συνάρτηση $Q : V \to \mathbb{R}$ λέγεται τετραγωνική μορφή αν μπορεί να γραφεί στη μορφή $Q(v) = b(v, v)$ για κάποια συμμετρική διγραμμική μορφή $b : V \times V \to \mathbb{R}$.*

Παρατηρούμε ότι αν η b είναι συμμετρική διγραμμική μορφή τότε

$$b(v+w, v+w) = b(v, v)+2b(v, w)+b(w, w) \Rightarrow Q(v+w, v+w) = Q(v, v)+2b(v, w)+Q(w, w)$$

μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε την b από την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή:
$$b(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w, v + w) - Q(v, v) - Q(w, w))$$

Αν S κανονική επιφάνεια ο εφαπτόμενος χώρος της S σε ένα σημείο p, $T_p(S)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2. Ο περιορισμός του εσωτερικού γινομένου $< , >$ του $\mathbb{R}^3$ στον $T_p(S)$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο του $T_p(S)$ που συμβολίζουμε με $< , >_p$. Αυτό το εσωτερικό γινόμενο μας δίνει μία συμμετρική διγραμμική μορφή στον $T_p(S)$.

Ορισμός. *Η τετραγωνική μορφή:*

$$I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}, \; I_p(w) =< w, w >_p= \|w\|^2$$

*ονομάζεται **πρώτη θεμελιώδης μορφή** της S στο p.*

Αν $r : U \to S$ μία παραμέτρηση της S και $p = r(q)$ τότε τα διανύσματα

$$r_u(q) = \frac{\partial r}{\partial u}(q),\ r_v(q) = \frac{\partial r}{\partial v}(q)$$

δίνουν μία βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p(S)$. Θα δούμε τώρα πως εκφράζεται η θεμελιώδης μορφή σ' αυτή τη βάση.

Έστω $w \in T_p(S)$. Τότε $w = \lambda_1 r_u(q) + \lambda_2 r_v(q)$ και

$$< w, w >= \lambda_1^2 < r_u(q), r_u(q) > +2\lambda_1\lambda_2 < r_u(q), r_v(q) > +\lambda_2^2 < r_v(q), r_v(q) >$$

Θέτουμε

$$E(q) =< r_u(q), r_u(q) >= \|r_u(q)\|^2$$
$$F(q) =< r_u(q), r_v(q) >$$
$$G(q) =< r_v(q), r_v(q) >$$

Τα $E(q), F(q), G(q)$ ονομάζονται **θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης** της S στο p.

Καθώς το q μεταβάλεται παίρνουμε τις συναρτήσεις $E(u,v), F(u,v), G(u,v) : U \to \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι οι E, F, G είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις υπό την προϋπόθεση ότι η παραμέτρηση r είναι C^2.

Αν $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ είναι μία διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(0) = p$ τότε $\alpha'(0) = r_u(q)u'(0) + r_v(q)v'(0)$ και

$$I_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = E(q)u'(0)^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)v'(0)^2$$

η συμβολικά

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Παράδειγμα 3.11. *Θεωρούμε το επίπεδο με παραμέτρηση:*

$$r(u,v) = a + up + vq$$

όπου τα p, q είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύματα.

Τότε $E(u,v) = G(u,v) = 1$ και $F(u,v) = 0$. Αν $w = \lambda r_u + \mu r_v$, $I(w) = I(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2$

Παράδειγμα 3.12. *Θεωρούμε τον ορθογώνιο κύλινδρο με παραμέτρηση:*

$$r(u,v) = (\cos u, \sin u, v),\ u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$$

Έχουμε

$$r_u = (-\sin u, \cos u, 0),\ r_v = (0,0,1)$$

άρα

$$E(u,v) = G(u,v) = 1,\ \ F(u,v) = 0$$

Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος και το επίπεδο παρά το ότι είναι διαφορετικές επιφάνειες έχουν τα ίδια θεμελιώδη μεγέθη.

Μήκος καμπύλης

Έστω S κανονική επιφάνεια με παραμέτρηση $r : U \to S$ και $\alpha : [b,c] \to S$, $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ διαφορίσιμη καμπύλη στην S. Τότε το μήκος της α δίνεται από

$$L(\alpha) = \int_b^c \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_b^c \sqrt{E(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))v'(t)^2}dt$$

Γωνία ανάμεσα σε δύο καμπύλες

Αν $\alpha : I \to S$, $\beta : I \to S$ κανονικές καμπύλες που περνούν από το $p = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$ τότε η γωνία θ που σχηματίζουν στο p μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$\cos\theta = \frac{< \alpha'(t_0), \beta'(t_0) >}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}$$

Στην ειδική περίπτωση που οι καμπύλες α, β είναι οι παραμετρικές καμπύλες $\alpha(u) = r(u, v_0)$, $\beta(v) = r(u_0, v)$ τότε η γωνία ϕ που σχηματίζουν δίνεται από

$$\cos\phi = \frac{< r_u(q), r_v(q) >}{\|r_u(q)\| \|r_v(q)\|} = \frac{F(q)}{\sqrt{E(q)G(q)}}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι παραμετρικές καμπύλες της r είναι ορθογώνιες αν και μόνο αν $F(u,v) = 0$ για κάθε (u,v).

Εμβαδόν επιφάνειας

Αν D είναι ένα παραλληλόγραμμο στο $\mathbb{R}^3$ με πλευρές v_1, v_2 τότε το εμβαδόν του D είναι ίσο με βάση επί ύψος επομένως είναι ίσο με $\|v_1\| \|v_2\| \sin\theta$ όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα v_1, v_2. Απ΄ την άλλη

$$\cos\theta = \frac{< v_1, v_2 >}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

άρα

$$\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2\theta = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - < v_1, v_2 >^2 = \|v_1 \times v_2\|^2$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι το εμβαδόν του D, $A(D)$, είναι ίσο με $\|v_1 \times v_2\|$.

Θεωρούμε τώρα μία παραμέτρηση επιφάνειας $r : U \to S$ και έστω D ένα ορθογώνιο που περιέχεται στο U. Υποδιαιρούμε το D σε μικρότερα ορθογώνια με πλευρές της μορφής $a(t) = (u_0 + t, v_0)$, $t \in [0, \Delta u]$, $b(t) = (u_0, v_0 + t)$, $t \in [0, \Delta v]$. Αν τα $\Delta u, \Delta v$ είναι αρκετά μικρά το μήκος των καμπυλών $r(a(t))$, $r(b(t))$ είναι προσεγγιστικά ίσο με $r_u(u_0, v_0)\Delta u, r_v(u_0, v_0)\Delta v$ και επομένως το εμβαδό της εικόνας του ορθογωνίου με πλευρές a, b είναι προσεγγιστικά ίσο με

$$\|r_u \times r_v\| \Delta u \Delta v$$

Παίρνοντας όλο και πιο μικρές διαμερίσεις και αθροίζοντας τα εμβαδά των ορθογωνίων της διαμέρισης καταλήγουμε στον τύπο

$$A(r(D)) = \iint\limits_D \|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| dudv$$

Γενικότερα μπορούμε να προσεγγίσουμε οποιοδήποτε επίπεδο χωρίο με ορθογώνια. Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός. *Έστω S κανονική επιφάνεια και $r : U \to S$ παραμέτρηση της S. Αν $K = r(Q)$ είναι ένα φραγμένο χωρίο της S τότε το* ***εμβαδόν*** *του K, $A(K)$, δίνεται από το ολοκλήρωμα:*

$$A(K) = \iint\limits_Q \|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| dudv$$

Πρόταση 3.8. *Το εμβαδόν ενός χωρίου K δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της επιφάνειας S.*

Απόδειξη. Πράγματι έστω $\bar{r} : V \to S, \bar{r}(\bar{u},\bar{v})$ μία άλλη παραμέτρηση της S τ.ω. $K = \bar{r}(Q_1) \subset \bar{r}(V)$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων $\phi = \bar{r}^{-1} \circ r : Q \to Q_1$, $\phi(u,v) = (\bar{u},\bar{v})$. Τότε $r(u,v) = \bar{r} \circ \phi(u,v)$. Επομένως

$$Dr = D\bar{r} \circ D\phi \Rightarrow r_u = \bar{r}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + r_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u},\ r_v = r_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + r_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}$$

Αντικαθιστώντας και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του εξωτερικού γινομένου έχουμε

$$r_u \times r_v = (\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}) r_{\bar{u}} \times r_{\bar{v}} = \frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} r_{\bar{u}} \times r_{\bar{v}}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητών για διπλά ολοκληρώματα:

$$\iint\limits_Q \|r_u \times r_v\| dudv = \iint\limits_Q |\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}| \|r_{\bar{u}} \times r_{\bar{v}}\| dudv =$$

$$= \iint\limits_{Q_1} \|r_{\bar{u}} \times r_{\bar{v}}\| d\bar{u} d\bar{v}$$

$\square$

Παρατηρούμε ότι αν $q \in U$,

$$\|r_u(q) \times r_v(q)\|^2 = < r_u(q), r_u(q) >< r_v(q), r_v(q) > - < r_u(q), r_v(q) >^2 = E(q)G(q) - F^2(q)$$

επομένως ο τύπος του εμβαδού χρησιμοποιώντας τα θεμελιώδη μεγέθη είναι:

$$A(K) = \iint\limits_Q \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}dudv$$

Παρατηρούμε ότι αν μία παραμέτρηση $r : Q \to S$ δεν καλύπτει εξ ολοκλήρου ένα σύνολο K αλλά είναι ίσο με το K μείον ένα σύνολο μηδενικού εμβαδού π.χ. μία καμπύλη, τότε και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του K χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο.

Παράδειγμα 3.13. *Υπολογίστε το εμβαδόν της σπείρας T.*

Μία παραμέτρηση της σπείρας δίνεται από

$$\phi(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u) \;\; u \in [0, 2\pi), v \in [0, 2\pi)$$

Έχουμε

$$\phi_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$$
$$\phi_v = (-(a + r\cos u)\sin v, (a + r\cos u)\cos v, 0)$$
$$E =< \phi_u, \phi_u >= r^2$$
$$F =< \phi_u, \phi_v >= 0$$
$$G =< \phi_v, \phi_v >= (a + r\cos u)^2$$

επομένως

$$A(T) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(a+r\cos u)dvdu =$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\pi r(a + r\cos u)du = 4\pi^2 ra$$

Παράδειγμα 3.14. *Υπολογίστε το εμβαδόν της σφαίρας ακτίνας 1, S^2.*

Μία παραμέτρηση της σφαίρας δίνεται από

$$r(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \;\; 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$$

Η εικόνα της r καλύπτει όλη τη σφαίρα εκτός από ένα ημικύκλιο (που φυσικά έχει μηδενικό εμβαδόν). Υπολογίζουμε:

$$r_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$
$$r_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$
$$E =< r_\theta, r_\theta >= \cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta = 1$$
$$F =< r_\theta, r_\phi >= -\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi = 0$$
$$G =< r_\phi, r_\phi >= \sin^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi = \sin^2\theta$$

$$A(S^2) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin\theta| d\phi d\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = 4\pi$$

3.7 Προσανατολισμός επιφάνειας

Έστω $r : U \to S$ παραμέτρηση επιφάνειας και $p = r(q) \in r(U)$. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο p παράγεται από τα διανύσματα $r_u(q), r_v(q)$ επομένως το διάνυσμα

$$r_u(q) \times r_v(q)$$

είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS. Ένα διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS λέμε ότι είναι **κάθετο** διάνυσμα της S στο p. Ένα κάθετο διάνυσμα στο p μήκους 1 λέγεται **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα** της S στο p. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο p. Αν $r : U \to S$ παραμέτρηση και $q = r(p)$ τότε το διάνυσμα

$$N(p) = \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|}$$

είναι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο p.

Ορισμός. *Έστω S κανονική επιφάνεια. Μία διαφορίσιμη απεικόνιση $F : S \to \mathbb{R}^3$ λέγεται **διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο** επί της S. Αν $F(p)$ κάθετο στο p με $\|F(p)\| = 1$ για κάθε $p \in S$ λέμε ότι η F είναι **μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο** επί της S.*

Παρατηρούμε ότι αν $r : U \to S$ παραμέτρηση επιφάνειας η απεικόνιση

$$N : r(U) \to \mathbb{R}^3,\ N(r(q)) = \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|}$$

ορίζει ένα μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο επί της $r(U)$.

Δεν είναι πάντα δυνατό να επεκτείνουμε το N σε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο που να ορίζεται σε όλη την S. Για παράδειγμα δεν υπάρχει τέτοιο πεδίο στην ταινία Möbius.

Ορισμός. *Έστω S κανονική επιφάνεια. Αν υπάρχει μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο επί της S*

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

*λέμε ότι η S είναι **προσανατολίσιμη**. Το N λέγεται προσανατολισμός της S.*

Παράδειγμα 3.15. *Η σφαίρα S^2 είναι προσανατολίσιμη. Παρατηρούμε ότι αν $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ τότε $p \perp T_p(S)$ και $\|p\| = 1$. Η απεικόνιση $N(p) = p$ ορίζει ένα μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο επί της S^2 επομένως η S^2 είναι προσανατολίσιμη.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η $N : S^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη: Έστω $p = (x, y, z) \in S$. Ας πούμε ότι $x > 0$. Θεωρούμε την παραμέτρηση $r : U \to S^2$ $r(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$ όπου U είναι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος.

Τότε $p \in r(U)$ και $N \circ r(u,v) = r(u,v)$ που είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, άρα η N είναι διαφορίσιμη στο p. Η απόδειξη είναι όμοια αν $x < 0$ ή $y, z \neq 0$ και $x = 0$.

$\square$

Ερώτηση. Μπορούμε να ορίσουμε άλλον ένα προσανατολισμό της σφαίρας;
Ερώτηση. Είναι ο κύλινδρος προσανατολίσιμος;

3.8 Η απεικόνιση Gauss

Θα υποθέσουμε στο εξής ότι όλες οι επιφάνειες δίνονται από παραμετρήσεις $r : U \to S$ τ.ω. η r είναι C^2.

Αν η S είναι προσανατολίσιμη κανονική επιφάνεια και $N : S \to \mathbb{R}^3$ είναι ένας προσανατολισμός της S (δηλ. ένα μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο)τότε $\|N(p)\| = 1$ για κάθε $p \in S$. Επομένως το $N(p)$ είναι ένα σημείο της σφαίρας ακτίνας 1 με κέντρο το 0, S^2.

Ορισμός. *Η απεικόνιση $N : S \to S^2$ λέγεται* ***απεικόνιση Gauss*** *της S.*

Πρόταση 3.9. *Η απεικόνιση Gauss είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $p \in S$ και έστω $r : U \to S$ παραμέτρηση τ.ω. $r(q) = p$ και

$$N(p) = \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $N \circ r : U \to \mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη. Αλλά

$$N(r(q)) = \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|}$$

επομένως η $N \circ r$ είναι C^1 άρα είναι διαφορίσιμη. $\square$

Το διαφορικό της απεικόνισης N, $T_p(N)$, είναι μία γραμμική απεικόνιση από τον T_pS στον $T_{N(p)}(S^2)$. Παρατηρούμε ωστόσο ότι ο $T_p(S)$ και ο $T_{N(p)}(S^2)$ είναι επίπεδα κάθετα στο $N(p)$ και περνάνε από το 0 επομένως είναι ίσοι.

Επομένως μπορούμε να δούμε το διαφορικό της N σαν απεικόνιση

$$T_p(N) : T_pS \to T_pS$$

Ορισμός. *Η απεικόνιση*

$$-T_p(N) : T_pS \to T_pS$$

ονομάζεται ***τελεστής σχήματος****.*

Παράδειγμα 3.16. *Αν S είναι το επίπεδο τότε η N είναι σταθερή, επομένως ο τελεστής σχήματος είναι η μηδενική απεικόνιση.*

Παράδειγμα 3.17. *Αν S είναι ο κύλινδος, θεωρούμε την παραμέτρηση $r(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ και υπολογίζουμε:*

$$r_u = (-\sin u, \cos u, 0),\ \ r_v = (0,0,1)$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση:

$$N(r(u,v)) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

Για να υπολογίσουμε τον τελεστή σχήματος αρκεί να υπολογίσουμε την εικόνα των r_u, r_v. Αν

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, v_0),\ \ b(v) = ((\cos u_0, \sin u_0, v)$$

είναι οι παραμετρικές καμπύλες στο σημείο (u_0, v_0) τότε

$$N(\alpha(u)) = (\cos u, \sin u, 0),\ N(\beta(v)) = (\cos u_0, \sin u_0, 0)$$

άρα

$$-T_pN(r_u) = -(N(\alpha(u)))' = (\sin u, -\cos u, 0) = -r_u,\ \ -T_pN(r_v) = (0,0,0)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής (γραμμική απεικόνιση) $T : V \to V$ είναι αυτοσυζυγής αν $< Tv, w >=< v, Tw >$ για κάθε $v, w \in V$.

Πρόταση 3.10. *Ο τελεστής σχήματος είναι αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\bar{N} = N \circ r : U \to \mathbb{R}^3$ όπου r παραμέτρηση τάξης C^2 της επιφάνειας S.

Για να δείξουμε ότι ο τελεστής σχήματος $-T_pN : T_pS \to T_pS$ είναι αυτοσυζυγής αρκεί να δείξουμε ότι

$$< T_pN(v_1), v_2 >=< T_pN(v_1), v_2 >$$

για μία βάση $\{v_1, v_2\}$ του T_pS. Πράγματι αυτό έπεται εύκολα από τη γραμμικότητα του T_pN.

Θα δείξουμε λοιπόν την παραπάνω ισότητα για την standard βάση του T_pS, $\{r_u, r_v\}$. Έστω $p = r(q) = r(u_0, v_0)$.

Θεωρούμε τις παραμετρικές καμπύλες $\alpha(u) = r(u, v_0),\ \ \beta(v) = r(u_0, v)$.

Από τον ορισμό του διαφορικού έχουμε:

$$T_pN(r_u) = N(\alpha(u))' = (\bar{N}(u, v_0))' = \bar{N}_u(q)$$

$$T_pN(r_v) = N(\beta(v))' = (\bar{N}(u_0, v))' = \bar{N}_v(q)$$

Επομένως

$$< T_pN(r_u), r_v >=< \bar{N}_u(q), r_v >$$

$$< T_pN(r_v), r_u >=< \bar{N}_v(q), r_u >$$

Από την άλλη έχουμε ότι

$$\bar{N} \perp r_u, r_v \Rightarrow < \bar{N}, r_u >=< \bar{N}, r_v >= 0$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους ως προς v, u ανίστοιχα έχουμε:

$$\frac{\partial < \bar{N}, r_u >}{\partial v} =< \bar{N}_v, r_u > + < \bar{N}, r_{uv} >= 0$$

$$\frac{\partial < \bar{N}, r_v >}{\partial u} =< \bar{N}_u, r_v > + < \bar{N}, r_{vu} >= 0$$

Αφού η r είναι C^2 έχουμε $r_{uv} = r_{vu}$ επομένως

$$< \bar{N}_u(q), r_v >=< \bar{N}_v(q), r_u >$$

Συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής σχήματος είναι αυτοσυζυγής.

□

Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_1, ..., e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του V. Αν $T : V \to V$ αυτοσυζυγής τελεστής και $A = (a_{ij})$ ο πίνακας του T ως προς αυτή τη βάση τότε $a_{ij} =< Te_i, e_j >=< Te_i, e_j >= a_{ji}$. Άρα ο πίνακας A του T σ' αυτή τη βάση είναι συμμετρικός και επομένως διαγωνιοποιήσιμος. Είναι γνωστό από τη θεωρία των αυτοσυζυγών γραμμικών απεικονίσεων ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του T είναι διαγώνιος.

Καθώς εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με χώρους διάστασης 2 δίνουμε μία απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων αυτοσυζυγών τελεστών σ' αυτή την περίπτωση.

Έστω λοιπόν $T : V \to V$ αυτοσυζυγής όπου ο V είναι διάστασης 2. Αν e_1, e_2 ορθοκανονική βάση του V τότε ο πίνακας του T σ' αυτή τη βάση είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$(a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

επομένως οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί λ_1, λ_2. Αν $\lambda_1 = \lambda_2$ τότε $(a - d)^2 + 4b^2 = 0$ και $a = d$, $b = 0$, επμένως $T = aI$ και ο πίνακας του T ως προς οποιαδήποτε βάση είναι διαγώνιος. Διαφορετικά έστω v_1, v_2 ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές. Έχουμε

$$< \lambda_1 v_1, v_2 >=< T v_1, v_2 >=< v_1, T v_2 >=< v_1, \lambda_2 v_2 >$$

άρα

$$(\lambda_1 - \lambda_2) < v_1, v_2 >= 0 \Rightarrow < v_1, v_2 >= 0$$

δηλ. η βάση v_1, v_2 είναι ορθοκανονική.

Συμπεραίνουμε επομένως ότι αφού ο τελεστής σχήματος $-T_pN$ είναι αυτοσυζυγής υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ του T_pS και ιδιοτιμές $k_1 \geq k_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας του T ως προς τη βάση $\{w_1, w_2\}$ είναι:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Ορισμός. *Οι ιδιοτιμές k_1, k_2 καλούνται* ***κύριες καμπυλότητες*** *της S στο p. Οι κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα w_1, w_2 λέγονται* ***κύριες κατευθύνσεις*** *της S στο p. Το γινόμενο*

$$K(p) = k_1 k_2 = det(T_pN)$$

καλείται ***καμπυλότητα Gauss*** *της S στο p και η ποσότητα*

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2} tr(T_pN)$$

καλείται ***μέση καμπυλότητα*** *της S στο p.*

Παρατηρούμε ότι αν αλλάξουμε τον προσανατολισμό της S από N σε $-N$ τότε ο τελεστής σχήματος είναι T_pN άρα οι ιδιοτιμές του είναι $-k_1, -k_2$ επομένως η καμπυλότητα Gauss δεν αλλάζει αλλά η μέση καμπυλότητα αλλάζει πρόσημο.

Ορισμός. *Ένα σημείο $p \in S$ λέγεται*

- ***ελλειπτικό*** *αν $K(p) > 0$*
- ***υπερβολικό*** *αν $K(p) < 0$*
- ***παραβολικό*** *αν $K(p) = 0$ και $T_pN \neq 0$*
- ***επίπεδο*** *αν $T_pN = 0$.*

Η επόμενη πρόταση γενικεύει τον χαρακτηρισμό της ευθείας ως καμπύλης με μηδενική καμπυλόλητα στις 2 διαστάσεις: μία συνεκτική επιφάνεια περιέχεται σε επίπεδο αν και μόνο αν ο τελεστής σχήματος της επιφάνειας είναι μηδενικός. Υπενθυμίζουμε ότι ένα ανοιχτό υποσύνολο U του επιπέδου είναι συνεκτικό αν δεν είναι ξένη ένωση μη κενών ανοιχτών συνόλων. Υπενθυμίζουμε το παρακάτω λήμμα από τον λογισμό πολλών μεταβλητών:

Λήμμα. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου. Αν $f : U \to \mathbb{R}^3$ είναι C^1 συνάρτηση τ.ω. $f_x = f_y = 0$ τότε $f(x, y) = c$ σταθερά.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $g(x) = f(x, y_1)$ τότε $g'(x) = f_x(x, y_1) = 0$ άρα η $g(x)$ είναι σταθερή. Όμοια η $h(y) = f(x_1, y)$ είναι σταθερή. Αν $f(x_0, y_0) = c$ θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x, y) \in U : f(x, y) = c\}$. Παρατηρούμε ότι το A είναι ανοιχτό. Πράγματι έστω $p = (x_1, y_1)$ ένα σημείο του A και $D_\epsilon(p)$ ένας ανοιχτός δίσκος με κέντρο το p που περιέχεται στο U. Αν $(x, y) \in D_\epsilon(p)$ παρατηρούμε ότι $f(x_1, y_1) = f(x, y_1) = f(x, y)$, άρα $D_\epsilon(p) \subset A$. Συμπεραίνουμε ότι το A είναι ανοιχτό. Αφού η f είναι συνεχής το A είναι επίσης κλειστό ($A = f^{-1}(\{c\})$ και το $\{c\}$ είναι κλειστό). Αν $A \neq U$ τότε $U - A$ ανοιχτό και το U γράφεται σαν ξένη ένωση 2 ανοιχτών $U = A \cup (U - A)$, άτοπο. Επομένως $A = U$ και η f είναι σταθερή.

□

Πρόταση 3.11. *Έστω $r : U \to S = r(U)$ C^2 παραμέτρηση επιφανείας, όπου U ανοιχτό συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου. Τότε η S περιέχεται σε επίπεδο αν και μόνο αν $T_pN = 0$ για κάθε $p \in S$.*

Απόδειξη. Προφανώς αν η S περιέχεται σε επίπεδο $N(p) = N$ σταθερό, άρα $T_pN = 0$. Αντίστροφα έστω $\{r_u, r_v\}$ η standard βάση του T_pS. Όπως είδαμε στην πρόταση 3.10

$$T_pN(r_u) = \bar{N}_u(q)$$

$$T_pN(r_v) = \bar{N}_v(q)$$

όπου $p = r(q)$, $\bar{N} = N \circ r$. Επομένως $\bar{N}_u(q) = \bar{N}_v(q) = 0$ για κάθε $q \in U$. Επομένως από το προηγούμενο λήμμα $N(r(u, v)) = N_0$ σταθερό. Τώρα έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial u} < r(u, v), N_0 >=< r_u, N_0 >= 0, \ \frac{\partial}{\partial v} < r(u, v), N_0 >=< r_v, N_0 >= 0$$

Συμπεραίνουμε ότι $< r(u, v), N_0 >= c$ σταθερό. Άρα

$$< r(u, v), N_0 >=< r(u_0, v_0), N_0 >\Rightarrow< r(u, v) - r(u_0, v_0), N_0 >$$

δηλαδή $r(U)$ περιέχεται στο επίπεδο που περνά από το $r(u_0, v_0)$ και είναι κάθετο στο N_0. □

3.9 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Ο τελεστής σχήματος $-T_pN$ ορίζει μία συμμετρική διγραμμική μορφή b στον T_pS:

$$b(v, w) =< -T_pN(v), w >$$

Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή

$$I\!I_p : T_pS \to \mathbb{R}, \ I\!I_p(w) = - < T_pN(w), w >$$

ονομάζεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S στο p.**

Από τις ιδιοτιμές k_1, k_2 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{w_1, w_2\}$ του $-T_pN$ μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την δεύτερη θεμελιώδη μορφή II_p. Πράγματι η βάση $\{w_1, w_2\}$ είναι ορθοκανονική επόμένως αν w τυχόν διάνυσμα του $T_p(S)$ με $\|w\| = 1$ τότε $w = w_1 \cos\theta + w_2 \sin\theta$ για κάποιο θ. Επομένως έχουμε:

$$II_p(w) = - < T_pN(w), w >=< w_1k_1 \cos\theta + w_2 \sin\theta k_2, w_1 \cos\theta + w_2 \sin\theta >=$$

$$= k_1 \cos^2\theta < w_1, w_1 > +k_2 \sin\theta \cos\theta < w_1, w_1 > +k_2 \sin^2\theta < w_2, w_2 >=$$

$$= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

Επομένως

$$II_p(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \quad (\textbf{Τύπος του Euler})$$

Παρατηρούμε ότι αν $k_1 \geq k_2$ τότε k_1 είναι η μέγιστη τιμή της II_p και k_2 είναι η ελάχιστη τιμή της στο σύνολο $\{w : \|w\| = 1\}$.

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να υπολογίσουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή από μία παραμέτρηση $r : U \to S$. Όπως δείξαμε στην πρόταση 3.10

$$T_p(N)(r_u) = \bar{N}_u,\ T_p(N)(r_v) = \bar{N}_v$$

όπου $\bar{N}(u, v) = N(r(u, v))$. Στη συνέχεια για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θα γράφουμε N αντί για $\bar{N}$.

Έστω λοιπόν ότι

$$N_u = a_{11}r_u + a_{21}r_v$$

$$N_v = a_{12}r_u + a_{22}r_v$$

Τότε ο πίνακας του T_pN στη βάση $\{r_u, r_v\}$ είναι

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Απ΄ την άλλη αν $w\lambda r_u + \mu r_v$ τυχαίο διάνυσμα του T_pS η δεύτερη θεμελιώδης μορφή δίνεται από

$$II_p(w) =< -T_pN(w), w >= - < \lambda N_u + \mu N_v, \lambda r_u + \mu r_v >=$$

$$= -\lambda^2 < N_u, r_u > -2\lambda\mu < N_u, r_v > -\mu^2 < N_v, r_v >$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $< N_u, r_v >=< N_v, r_u >$ που αποδείξαμε στην πρόταση 3.10. Θέτουμε τώρα

$$e = - < N_u, r_u >$$

$$f = - < N_u, r_v >= - < N_v, r_u >$$

$$g = - < N_v, r_v >$$

Οι συναρτήσεις e, f, g ονομάζονται **θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης της** S. Παρατηρούμε ότι $< N, r_u > = < N, r_v > = 0$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$< N_v, r_u > + < N, r_{uv} > = 0 \Rightarrow < N_v, r_u > = - < N, r_{uv} >$$

$$< N_u, r_u > + < N, r_{uu} > = 0 \Rightarrow < N_u, r_u > = - < N, r_{uu} >$$

$$< N_v, r_v > + < N, r_{vv} > = 0 \Rightarrow < N_v, r_u > = - < N, r_{vv} >$$

Επομένως έχουμε

$$e = < N, r_{uu} >$$

$$f = < N, r_{uv} > = < N, r_{vu} >$$

$$g = < N, r_{vv} >$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τον πίνακα του T_pN συναρτήσει των θεμελιωδών μεγεθών 1ης και 2ης τάξης:

$$-f = < N_u, r_v > = < a_{11} r_u + a_{21} r_v, r_v > = a_{11} < r_u, r_v > + a_{21} < r_v, r_v > \Rightarrow$$

$$-f = < N_u, r_v > = a_{11} F + a_{21} G$$

όμοια

$$-f = < N_v, r_u > = a_{12} E + a_{22} F$$

$$-e = < N_u, r_u > = a_{11} E + a_{21} F$$

$$-g = < N_v, r_v > = a_{12} F + a_{22} G$$

όπου E, F, G είναι τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης της S. Μπορούμε να εκφράσουμε τις παραπάνω ισότητες χρησιμοποιώντας πίνακες:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \qquad \textbf{(*)}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Επομένως οι συντελεστές του πίνακα του T_pN δίνονται από τις ισότητες:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$
$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως **εξισώσεις του Weingarten**.

Υπολογισμός της καμπυλότητας

Από την ισότητα πινάκων (*) μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την καμπυλότητα Gauss:

$$K = det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες υπολογίζουμε το ίχνος του πίνακα (a_{ij}) και παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο για την μέση καμπυλότητα:

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Από τις H, K μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες καμπυλότητες (ιδιοτιμές του (a_{ij}) αφού

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$$

επομένως έχουμε

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Στους υπολογισμούς των θεμελιωδών μεγεθών 2ης τάξης εμφανίζονται μικτά γινόμενα δηλ. γινόμενα της μορφής: $< a \times b, c >$. Για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό θέτουμε $[a, b, c] =< a \times b, c >$. Υπενθυμίζουμε (δες παράγραφο 2.3) ότι το $[a, b, c]$ είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα που έχει σαν γραμμές τα a, b, c.

Παράδειγμα 3.18. *Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss της σπείρας T.*

Χρησιμοποιούμε την παραμέτρηση:

$$r(u, v) = ((a+r\cos u)\cos v, (a+r\cos u)\sin v, r\sin u),\ \ u \in (0, 2\pi), v \in (0, 2\pi)$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης:

$$r_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$$

$$r_v = (-(a + r\cos u)\sin v, (a + r\cos u)\cos v, 0)$$

$$E =< r_u, r_u >= r^2,\ F =< r_u, r_v >= 0,\ G =< r_v, r_v >= (a + r\cos u)^2$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης:

$$r_{uu} = (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u)$$

$$r_{uv} = (r\sin u \sin v, -r\sin u\cos v, 0$$

$$r_{vv} = (-(a + r\cos u)\cos v, -(a + r\cos u)\sin v, 0)$$

Λαμβάνοντας υπ όψη ότι

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{EG - F^2} = r(a + r\cos u)$$

και ότι το κάθετο διάνυσμα δίνεται από

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

έχουμε

$$e =< N, r_{uu} >=< \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}, r_{uu} >= \frac{[r_u, r_v, r_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r\cos u)}{r(a + r\cos u)} = r$$

όμοια υπολογίζουμε

$$f = \frac{[r_u, r_v, r_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}} = 0$$

$$g = \frac{[r_u, r_v, r_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}} = \cos u(a + r\cos u)$$

Επομένως η καμπυλότητα Gauss είναι

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r\cos u)}$$

3.10 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας

Για να κατανοήσουμε το σχήμα μίας επιφάνειας S σε ένα σημείο p είναι φυσιολογικό να εξετάσουμε την καμπυλότητα καμπύλων που περνάνε από το p και βρίσκονται πάνω στην S. Η πιο προφανής επιλογή είναι να μελετήσουμε καμπύλες που παίρνουμε από την τομή της S με επίπεδα κάθετα στην S στο p. Όπου λέμε ότι ένα επίπεδο E είναι κάθετο στην S στο p αν το E περιέχει το κάθετο διάνυσμα της S στο p, $N(p)$.

Έστω λοιπόν $\alpha = E \cap S$ όπου E κάθετο επίπεδο στο p. Μπορεί να αποδειχτεί ότι η α σε μία γειτονιά του p είναι κανονική καμπύλη. Θεωρούμε λοιπόν την παραμέτρηση με μήκους τόξου της α και υποθέτουμε ότι $\alpha(0) = p$. Παρατηρούμε ότι το $\alpha'(t) = T(t)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο p επομένως $\alpha'(t) \perp N(\alpha(t))$. Η α είναι επίπεδη καμπύλη και μπορούμε να ορίσουμε την προσημασμένη καμπυλότητα της α. Αν N_* το κάθετο διάνυσμα της α για το οποίο η βάση του κάθετου επιπέδου $T(0), N_*$ είναι θετικά προσανατολισμένη τότε $N_* = \pm N(p)$.

Υπολογίζουμε την προσημασμένη καμπυλότητα της α:

$$< N(\alpha(t)), \alpha'(t) >= 0 \Rightarrow < N(\alpha(t))', \alpha'(t) > + < N(\alpha(t)), \alpha''(t) >= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < T_pN(\alpha'(0)), \alpha'(0) > + < N(p), k_*(0)N_* >= 0 \Rightarrow k_*(0) = \pm II_p(\alpha'(0))$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η καμπυλότητα της α δίνεται από τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή στο εφαπτόμενο διάνυσμα της α. Από τον τύπο του Euler έχουμε ότι υπάρχουν 2 κατευθύνσεις στις οποίες η καμπυλότητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της k_1 και την ελάχιστη τιμή της k_2. Στις άλλες κατευθύνσεις η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο του Euler. Αρκεί δηλαδή να γνωρίζουμε τις κατευθύνσεις όπου η καμπυλότητα παίρνει την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της για να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα σε όλες τις άλλες κατευθύνσεις!

Αν $k_1 = k_2$ τότε η καμπυλότητα όλων των καμπυλών που παίρνουμε από τα κάθετα επίπεδα στο p είναι σταθερή. Τέτοια σημεία ονομάζονται **ομφάλια**.

Θεωρούμε τώρα τυχούσα καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας α με $\alpha(0) = p$ (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι η α ανήκει σε κάθετο επίπεδο στο p). Έστω n το πρώτο κάθετο διάνυσμα της α στο $\alpha(0)$. Αν $N = N(p)$ το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο p και $\cos\theta =< n, N >$ ορίζουμε την **κάθετη καμπυλότητα** της α στο p να είναι

$$k_n = k\cos\theta$$

Υπενθυμίζουμε ότι η καμπυλότητα k είναι το μήκος του $\alpha''(0)$, δηλ. $\alpha''(0) = kn$. Γεωμετρικά επομένως η κάθετη καμπυλότητα είναι το μήκος της προβολής του $\alpha''(0)$ στη διεύθυνση που ορίζει το N (με αρνητικό πρόσημο αν η διεύθυνση της προβολής είναι αντίθετη της διεύθυνσης του N). Μπορούμε να υπολογίσουμε την κάθετη καμπυλότητα όπως πρίν. Συμβολίζουμε με $N(s)$ το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο $\alpha(s)$.

$$< N(s), \alpha'(s) >= 0 \Rightarrow < N(s), \alpha''(s) >= - < N'(s), \alpha'(s) >$$

άρα

$$II_p(\alpha'(0)) = - < T_pN(\alpha'(0)), \alpha'(0) >=$$
$$= - < N'(0), \alpha'(0) >=< N(0), \alpha''(0) >= k_n(p)$$

Συμπεραίνουμε ότι η κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης εξαρτάται μόνο από το εφαπτόμενο διάνυσμα $\alpha'(0)$. Με άλλα λόγια όλες οι καμπύλες που περνάνε από το p στην επιφάνεια S και έχουν το ίδιο εφαπτόμενο διάνυσμα στο p έχουν την ίδια κάθετη καμπυλότητα.

Παρατηρούμε ότι αν α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\alpha(0) = p$ τότε το $\alpha'(0)$ και το $N(p)$ ορίζουν ένα κάθετο επίπεδο στο p, E. Θεωρούμε την καμπύλη γ που προκύπτει από την τομή $E \cap S$. Αν πάρουμε την παραμέτρηση με μήκος τόξου της γ τότε $\gamma'(0) = \alpha'(0)$ επομένως η κάθετη καμπυλότητα της γ είναι ίση με την κάθετη καμπυλότητα της α στο 0.