Βασική Άλγεβρα, Σεπτέμβριος 2005

Ομάδα Α

ΘΕΜΑ 1^0 (1 μονάδα)

Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{Z}$ ώστε $13x \equiv 3 \, mod \, 1000$.

ΘΕΜΑ 2^0 (3 μονάδες)

1. Έστω $\phi : G \to H$ ομομορφισμός ομάδων. Αν $g \in G$ δείξτε ότι η τάξη του $\phi(g)$ διαιρεί την τάξη του g.

2. Έστω $\phi : S_6 \to S_3$ ομομορφισμός. Δείξτε ότι η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

ανήκει στον πυρήνα της ϕ.

3. Δίνεται η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 6 & 10 & 11 & 12 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Είναι η σ άρτια;

ΘΕΜΑ 3^0 (3 μονάδες)

1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, όπου $\phi(p(x)) = p(2i)$ για κάθε $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

2. Δείξτε ότι ο ϕ είναι επιμορφισμός και υπολογίστε τον πυρήνα του, $I = ker \, \phi$. Είναι ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/I$ ισόμορφος με το $\mathbb{C}$;

3. Είναι το στοιχείο $(x+1)+I$ αντιστρέψιμο στο δακτύλιο $\mathbb{R}[x]/I$; Αν ναι, υπολογίστε τον αντίστροφό του.

ΘΕΜΑ 4^0 (3 μονάδες)

1. Δείξτε ότι αν $p(x), q(x)$ είναι σχετικά πρώτα πολυώνυμα με συντελεστές από ένα σώμα F, τα οποία διαιρούν το πολυώνυμο $f(x)$, τότε και το γινόμενό τους $p(x)q(x)$ διαιρεί το $f(x)$.

2. Δείξτε ότι το $x-2$ διαιρεί το $f(x) = x^{23} + 3x^{12} + 6x + 1$ στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

3. Δείξτε ότι το $(x-1)(x-2)$ διαιρεί το $f(x) = x^{23} + 3x^{12} + 6x + 1$ στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$.