Ασκήσεις

Κυλικές ομάδες, κανονικές υποομάδες, ομομορφισμοί ομάδων

1. Δείξτε ότι η ομάδα $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ είναι κυκλική και βρείτε όλους τους γεννήτορες της.

2. Βρείτε όλες τις κυκλικές υποομάδες της $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$.

3. Έστω G_1, G_2 πεπερασμένες ομάδες τέτοιες ώστε μκδ$(|G_1|, |G_2|) = 1$. Δείξτε ότι αν $f : G_1 \to G_2$ είναι ομομορφισμός τότε ο f είναι τετριμμένος (δηλ. $f(g) = 1$ για κάθε $g \in G_1$).

4. Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων απ΄ το $(\mathbb{Z}, +)$ στο $(\mathbb{Z}, +)$.

5. Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων υπάρχουν απ΄ το $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ στο $(\mathbb{Z}_8, +)$.

6. Δείξτε ότι οι ομάδες $U(\mathbb{Z}_7)$ και $\mathbb{Z}_6$ είναι ισόμορφες.

7. Υπάρχει ομάδα G τέτοια ώστε $G \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$;
Υπάρχει ομάδα G τέτοια ώστε $G \times S_3 \cong S_4$;

8. Δείξτε ότι η S_7 έχει μία υποομάδα ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.
Δείξτε ότι η S_7 έχει μία υποομάδα ισόμορφη με την $S_4 \times \mathbb{Z}_3$.

9. Δείξτε ότι οι ομάδες $U(\mathbb{Z}_7)$ και $U(\mathbb{Z}_{14})$ είναι ισόμορφες.

10. Δείξτε ότι οι ομάδες $U(\mathbb{Z}_8)$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ είναι ισόμορφες.

11. Δείξτε ότι αν N, K είναι κανονικές υποομάδες της ομάδας G τέτοιες ώστε $N \cap K = \{e\}$ τότε $nk = kn$ για κάθε $n \in N, k \in K$.

12. Δείξτε ότι όλες οι υποομάδες δείκτη 2 μιας ομάδας είναι κανονικές.

13. Δείξτε ότι η $SL_n(\mathbb{R})$ είναι κανονική υποομάδα της $GL_n(\mathbb{R})$.

14. Δείξτε ότι η $H = \{i, (123), (132)\}$ είναι κανονική υποομάδα της S_3.

15. Έστω ότι H, K είναι κανονικές υποομάδες της ομάδας G. Δείξτε ότι το σύνολο $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ είναι κανονική υποομάδα της G.

16. Υπολογίστε το κέντρο της S_3.

17. Αν μία κυκλική υποομάδα C μιας ομάδας G είναι κανονική στην G δείξτε ότι κάθε υποομάδα της C είναι κανονική στην G.

18. Δείξτε ότι αν $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_3$ ομομορφισμός τότε $Im\,\phi = \{e\}$.

19. Έστω G ομάδα και $Z(G)$ το κέντρο της G. Δείξτε ότι αν η $G/Z(G)$ είναι κυκλική τότε η G είναι αβελιανή.

20. Δείξτε ότι η $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ έχει μία κανονική υποομάδα N τέτοια ώστε $G/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

21. Έστω G ομάδα και N_1, N_2 κανονικές υποομάδες της. Δίνεται η απεικόνιση $\phi : G \to G/N_1 \times G/N_2$ με $\phi(g) = (gN_1, gN_2)$. Δείξτε ότι η ϕ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων και ότι η ϕ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $N_1 \cap N_2 = \{1\}$.

22. Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία της ομάδας $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένης τάξης.

23. Έστω G ομάδα τάξης 35 και $\phi : G \to H$ επιμορφισμός. Δείξτε ότι αν $ker\,\phi \neq \{e\}$ τότε η H είναι κυκλική.

24. Δείξτε ότι αν N είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G και $a \in G$ είναι ένα στοιχείο τάξης n, τότε η τάξη του aN στην ομάδα πηλίκο G/N είναι διαιρέτης του n.

25.* Αν G είναι πεπερασμένη ομάδα και $\phi : G \to G$ είναι ένας αυτομορφισμός τέτοιος ώστε $\phi(x) = x^{-1}$ για περισσότερα απο τα $3/4$ των στοιχείων της G τότε δείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

26. Δείξτε ότι οι ομάδες $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/ < (1, 0) >$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφες.