Υποομάδες-Θεώρημα Lagrange

1. Αν H υποομάδα της G και $a \in G$ θεωρούμε το σύνολο $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$. Δείξτε ότι aHa^{-1} είναι υποομάδα της G. Δείξτε ότι $|aHa^{-1}| = |H|$.

2. Το κέντρο $Z(G)$ μιας ομάδας G ορίζεται ως $Z(G) = \{z \in G : zg = gz$ για κάθε $g \in G\}$. Δείξτε ότι $Z(G)$ είναι υποομάδα της G.

3. Έστω H, K υποομάδες μιας ομάδας G με τάξεις 6 και 11 αντίστοιχα. Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.

4. Έστω H μία υποομάδα μιας ομάδας G με $|G : H| = m$. Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$, $g^k \in H$ για κάποιο $0 < k \leq m$.

5. Δείξτε ότι μία ομάδα G τάξης p^n, όπου p πρώτος, περιέχει τουλάχιστον μία υποομάδα τάξης p.

6. Δείξτε ότι αν μία ομάδα G περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο τάξης 2 τότε αυτό ανήκει στο κέντρο της ομάδας.

7. Ποιές από τις ομάδες $U(\mathbb{Z}_8), U(\mathbb{Z}_{10}), U(\mathbb{Z}_{12})$ είναι κυκλικές;

8. Έστω G μία ομάδα τάξης pq , όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα της G είναι κυκλική.

9. Έστω G μία ομάδα τάξης pq , όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι αν η G έχει μοναδική υποομάδα τάξης p και μοναδική υποομάδα τάξης q τότε η G είναι κυκλική.

10. Βρείτε όλες τις υποομάδες της S_3.

11. Πόσα στοιχεία τάξης 10 έχει μία κυκλική ομάδα τάξης 100;

12. Βρείτε την τάξη της κυκλικής υποομάδας της $(\mathbb{Z}_{36}, +)$ που παράγεται από το 32.

13. Έστω G, H δύο κυκλικές ομάδες τάξεων n και m αντίστοιχα. Δείξτε ότι η ομάδα $G \times H$ είναι κυκλική αν και μόνο αν μκδ$(m, n) = 1$.

14. Είναι η ομάδα $U(\mathbb{Z}_{3^{10}}) \times U(\mathbb{Z}_{5^{20}})$ κυκλική;

15. Δείξτε ότι η ομάδα $U(\mathbb{Z}_{17})$ είναι κυκλική. Βρείτε όλους τους γεννήτορες αυτής της ομάδας.

16. Έστω $G =< a >$ κυκλική ομάδα τάξης 120.
ι) Δείξτε ότι $< a^{54} >=< a^6 >$.
ιι) Βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n έτσι ώστε $< a^{26} >=< a^n >$.

17. Αποδείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 15 περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο τάξης 3.

18*. Έστω G ομάδα της οποίας η τάξη δε διαιρείται με το 3. Δείξτε ότι αν $(ab)^3 = a^3b^3$ για κάθε $a, b \in G$ τότε η G είναι αβελιανή.

19. Δείξτε ότι αν οι μόνες υποομάδες μιας ομάδας G είναι η G και η $\{e\}$ τότε η G είναι κυκλική τάξης p, όπου p πρώτος.

20. Έστω G ομάδα που έχει ακριβώς 3 υποομάδες. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική τάξης p^2, όπου p πρώτος.

21. Έστω A, B υποομάδες της πεπερασμένης ομάδας G με $A \subset B$. Δείξτε ότι $|G : A| = |G : B||B : A|$.

22. Έστω $n \geq 2$ και H μία υποομάδα της S_n περιττού δείκτη.
ι) Δείξτε ότι η H περιέχει τουλάχιστον μία περιττή μετάθεση.
ιι) Δείξτε ότι η H περιέχει $\frac{|H|}{2}$ άρτιες και $\frac{|H|}{2}$ περιττές μεταθέσεις.

23*) Έστω G αβελιανή ομάδα και a, b στοιχεία της G τάξης m και n αντίστοιχα. Δείξτε ότι η G έχει ένα στοιχείο με τάξη ίση με το εκπ(m, n).