ΟΜΑΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω G ομάδα. Δείξτε ότι αν $a^2 = e$ για κάθε $a \in G$ τότε η G είναι αβελιανή.

2. Δείξτε ότι αν η G είναι αβελιανή ομάδα τότε $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ για κάθε $a, b \in G$ και $n \in \mathbb{N}$.

3. Έστω G ομάδα. Δείξτε ότι αν $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ για κάθε $a, b \in G$ τότε η G είναι αβελιανή.

4. Στο σύνολο των ακεραίων ορίζουμε μία πράξη $\star$ με $m \star n = n + m$ αν ο n είναι άρτιος και $m \star n = n - m$ αν ο n είναι περιττός. Δείξτε ότι το σύνολο των ακεραίων μ′ αυτήν την πράξη είναι ομάδα.

5. α. Δείξτε ότι αν G είναι πεπερασμένη ομάδα τότε κάθε στοιχείο της G έχει πεπερασμένη τάξη.

β. Δείξτε ότι αν G είναι πεπερασμένη ομάδα τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a^N = e$ για κάθε $a \in G$.

6. Έστω G ομάδα και $a, b, c \in G$ τέτοια ώστε $a \cdot b \cdot c = e$. Δείξτε ότι $b \cdot c \cdot a = e$.

7. Δείξτε ότι αν η G είναι ομάδα άρτιας τάξης τότε υπάρχει κάποιο $a \neq e$ στην G τέτοιο ώστε $a^2 = e$.

8. Έστω A ένα υποσύνολο μιας πεπερασμένης ομάδας G, το οποίο περιέχει περισσότερα από τα μισά στοιχεία της ομάδας. Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχουν $a, b \in A$ με $g = a \cdot b$.

9*. Έστω G ομάδα στην οποία ισχύει $(a \cdot b)^i = a^i \cdot b^i$ για τρείς διαδοχικούς ακέραιους i και για όλα τα $a, b \in G$. Δείξτε ότι η G είναι αβελιανή.