Άλγεβρα Α   Σεπτέμβριος 2003

Α

Συνοπτικές Λύσεις

1) i) Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, το στοιχείο $[4n+7]$ του $\mathbb{Z}_{5n+9}$ είναι αντιστρέψιμο.

ii) Έστω $R=\left\{\frac{m}{2^a3^b} \middle| a,b,m\in\mathbb{Z},\ a,b\geq 0\right\}$. Αποδείξτε ότι το R, ως προς τις συνήθεις πράξεις πραγματικών αριθμών, είναι ακεραία περιοχή αλλά όχι σώμα. Αληθεύει ότι ο R είναι ισόμορφος με το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$;

Λύση i) Αρκεί να δείξουμε ότι μκδ$(4n+7,5n+9)=1$. Πράγματι, έχουμε $-5(4n+7)+4(5n+9)=1$.

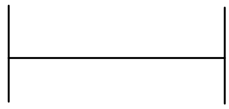
ii) Είναι υπόθεση ρουτίνας να αποδειχθεί ότι το σύνολο R είναι κλειστό ως προς την αφαίρεση και τον πολλαπλασιαμό και άρα είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$. Επομένως είναι ακεραία περιοχή. Δεν είναι σώμα γιατί αν, για παράδειγμα, $\frac{1}{5}\in R$, τότε $\frac{1}{5}=\frac{m}{2^a3^b}\Rightarrow 5m=2^a3^b$, άτοπο. Ο R δεν είναι ισόμορφος με το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ γιατί ο $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ δεν είναι ακεραία περιοχή.

2) i) Εξετάστε αν οι δακτύλιοι $R=\mathbb{Q}[x]/<x^2>$ και $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q})\right\}$ είναι ισόμορφοι.

ii) Να βρεθεί η ανάλυση του πολυωνύμου $x^4-2x^2-x-1\in\mathbb{Z}_3[x]$ σε γινόμενο αναγώγων.

Λύση i) Εφαρμόζουμε το 1^0 Θεώρημα Ισομορφισμών. Δες το παράδειγμα 7 σελίδα 162 του βιβλίου για την πλήρη λύση.

ii) Το 1 είναι ρίζα του αρχικού πολυωνύμου. Έχουμε $x^4-2x^2-x-1=(x-1)(x^3+x^2-x+1)$ και το x^3+x^2-x+1 είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_3[x]$ γιατί δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_3$ και είναι βαθμού 3. Δες το παράδειγμα 1 στη σελίδα 120 του βιβλίου.

3) i) Αληθεύει ότι η ομάδα συμμετριών του σχήματος  είναι κυκλική; Γιατί;

ii) Να βρεθεί ένα $\sigma \in S_7$ που έχει τη μεγαλύτερη δυνατή τάξη. Επίσης, να βρεθεί η ανάλυση της μετάθεσης σ^{2003} σε γινόμενο ξένων κύκλων.

iii) Έστω G μια ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της G με δείκτη $[G:H]=15$. Έστω $g \in G$. Αποδείξτε ότι $g \in H$ αν και μόνο αν $g^7 \in H$.

Λύση i) Αν G είναι η ομάδα συμμετριών του σχήματος, τότε: α) η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ γιατί κάθε ισομετρία του σχήματος είναι ισομετρία και του περιβάλλοντος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. β) η G περιέχει τουλάχιστον 3 στοιχεία, το ταυτοτικό και τις δύο προφανείς ανακλάσεις. Άρα $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και δεν είναι κυκλική. (Άλλος τρόπος: Επειδή η G περιέχει τις δύο προφανείς ανακλάσεις, συμπεραίνουμε ότι αυτή περιέχει υποομάδα ισόμορφη με τη $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Άρα δεν είναι κυκλική σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7.3 γ.)

ii) Ένα τέτοιο στοιχείο είναι το $\sigma = (123)(4567)$. Βλ. Πόρισμα 3.2.22 του βιβλίου. Τότε $\sigma^{2003} = (123)^{2003}(4567)^{2003} = (123)^{-1}(4567)^{-1} = (132)(4765)$.

iii) Η συνεπαγωγή $g \in H \Rightarrow g^7 \in H$ είναι προφανής. Αντίστροφα, έστω $g^7 \in H$. Από το γεγονός ότι η H είναι κανονική με $[G:H]=15$ έχουμε στην ομάδα πηλίκο $\dfrac{G}{H}$ ότι $(gH)^{15} = H \Rightarrow g^{15} \in H$. Από τη σχέση $g = g^{15}(g^7)^{-2}$ συμπεραίνουμε ότι $g \in H$.

.