ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σεπτέμβριος 2004

Ⓐ

Θέμα 1ον: α) Έστω ότι m, n είναι δύο φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε μκδ$(m, n+1) =$ μκδ$(m+1, n) = 1$. Αποδείξτε ότι μκδ$(mn, m+n+1) = 1$.

β) Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί x τέτοιοι ώστε $5^x \equiv 1 \bmod 16$.

Θέμα 2ον: α) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα άρτιας τάξης περιέχει στοιχείο τάξης 2.

β) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τέτοια ώστε υπάρχει ένας μη τετριμμένος ομομορφισμός ομάδων $\varphi : G \to \mathbb{Z}_4$. Αποδείξτε ότι η G περιέχει στοιχείο τάξης 2.

Θέμα 3ον: α) Έστω $\sigma = (1234) \in S_4$. Εξετάστε αν η κυκλική ομάδα $<\sigma>$ που παράγεται από το σ είναι κανονική υποομάδα της S_4.

β) Έστω G μια ομάδα τάξης 35. Εξετάστε αν κάθε γνήσια υποομάδα της G είναι αβελιανή.

Θέμα 4ον: Δίνεται το ιδεώδες $I = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = f(2) = 0\}$ του $\mathbb{R}[x]$.

α) Εξετάστε αν ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/I$ είναι ακεραία περιοχή.

β) Δίνεται ο ομομορφισμός δακτυλίων $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\Phi(f(x)) = (f(1), f(2))$. Αποδείξτε ότι ο Φ είναι επί και ο πυρήνας του είναι το I.

Θέμα 5ον: Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, $f(x) = x^3 + x + 2$.

α) Εξετάστε αν το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_3[x]$.

β) Να βρεθεί η ανάλυση του πολυωνύμου $x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο $\mathbb{Z}_3[x]$.