Βασική Άλγεβρα, Ιανουάριος 2005

ΘΕΜΑ 1^0 (1 μονάδα)

Έστω n ο αριθμός μητρώου σας. Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $3^n + 7^n$.

ΘΕΜΑ 2^0 (3 μονάδες)

1. Δίνεται η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 4 & 8 & 11 & 10 & 6 & 1 & 12 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Να αναλύσετε τις μεταθέσεις σ, σ^{192}, σ^{-1} σε γινόμενο ξένων κύκλων και να υπολογίσετε την τάξη τους.

2. Έστω G ομάδα και $a \in G$ στοιχείο της με τάξη 54. Να βρείτε πόσα στοιχεία της κυκλικής ομάδας $< a >$ έχουν τάξη 9.

3. Έστω H μία κανονική υποομάδα μιας ομάδας G και $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι ο δείκτης $|G : H|$ της H στην G είναι n. Δείξτε ότι $g^n \in H$ για κάθε $g \in G$.

ΘΕΜΑ 3^0 (3 μονάδες)

1. Δείξτε ότι το

$$I = \{r(x) \in \mathbb{Z}[x] : 5 | r(8)\}$$

είναι ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$.

2. Έστω $\varphi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ ο ομομορφισμός δακτυλίων με $\varphi(r(x)) = [r(8)]$. Υπολογίστε τον πυρήνα του φ.

Δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}[x]/I$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{Z}_5$.

3. Είναι το $r(x) = x^{233} + x^{121} - x^{43} - 3$ στοιχείο του I;

ΘΕΜΑ 4^0 (3 μονάδες)

1. Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

2. Υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x) = x^3 - 1$ στο $\mathbb{Z}_5[x]$.

3. Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (αν υπάρχουν) $t^2 + 2t - 1 = 0$ στους δακτυλίους:

(α) $\mathbb{Z}_6$, (β) $\mathbb{R}$, (γ) $\mathbb{Q}$, (δ) $\mathbb{Q}[x]$