Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου 2003
Άλγεβρα Α

Ομάδα α

1. (ι) Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί x και y, έτσι ώστε $12x + 20y = 32$.
   (ιι) Ποιές από τις παραπάνω τιμές του y είναι τέτοιες ώστε η κλάση του y modulo 5 είναι αντιστρέψιμη στο δακτύλιο $\mathbf{Z}_5$·

2. Για κάθε πολυώνυμο $f(X) \in \mathbf{Z}_5[X]$ να βρεθούν πολυώνυμα $m(X), n(X) \in \mathbf{Z}_5[X]$, τέτοια ώστε $f(X) = (X^2 + X + 1) \cdot m(X) + (X + 1) \cdot n(X)$.

3. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων
$$\varphi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_9,$$
   που είναι τέτοιος ώστε
$$\varphi(a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0) = ([a_0]_2, [a_0]_9)$$
   για κάθε πολυώνυμο $a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$. (Εδώ, συμβολίζουμε για κάθε ακέραιο αριθμό a με $[a]_2$ και $[a]_9$ την κλάση του a modulo 2 και modulo 9 αντίστοιχα.)
   (ι) Να βρεθεί ο πυρήνας του ομομορφισμού φ.
   (ιι) Να βρεθεί πολυώνυμο $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ με $\varphi(f(X)) = \varphi(X^2 + 3)$ και $f(0) \neq 3$.

4. Έστω $\sigma, \tau \in S_6$, όπου
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (ι) Να βρεθεί η τάξη του σ^{2003}.
   (ιι) Αποδείξτε ότι $<\sigma> \cap <\tau> = \{e\}$.

5. Θεωρούμε δυο πεπερασμένες ομάδες G και H με τάξεις 18 και 26 αντίστοιχα (δηλαδή, $|G| = 18$ και $|H| = 26$) και έναν ομομορφισμό ομάδων $\varphi : G \longrightarrow H$.
   (ι) Να δειχτεί ότι η υποομάδα $Im\,\varphi$ της H έχει τάξη 1 ή 2 και $\varphi(g^2) = 1 \in H$ για κάθε $g \in G$.
   (ιι) Είναι η φ 1-1·

Η σωστή (και σωστά τεκμηριωμένη) απάντηση σε καθένα από τα παραπάνω θέματα αξίζει 2.2 μονάδες. Η βάση επιτυχίας για την εξέταση είναι οι 5 μονάδες.

Ονοματεπώνυμο: ____________________ **Α.Μ.:** ____________________

Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου 2003
Άλγεβρα Α

Ομάδα β

1. (ι) Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί a και b, έτσι ώστε $9a + 10b = 24$.
(ιι) Ποιές από τις παραπάνω τιμές του b είναι τέτοιες ώστε η κλάση του b modulo 5 είναι αντιστρέψιμη στο δακτύλιο $\mathbf{Z}_5$·

2. Για κάθε πολυώνυμο $a(X) \in \mathbf{Q}[X]$ να βρεθούν πολυώνυμα $f(X), g(X) \in \mathbf{Q}[X]$, τέτοια ώστε $a(X) = (X^3 + 1) \cdot f(X) + (X^2 + 1) \cdot g(X)$.

3. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων
$$\varphi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4,$$
που είναι τέτοιος ώστε
$$\varphi(a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0) = ([a_0]_3, [a_0]_4)$$
για κάθε πολυώνυμο $a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$. (Εδώ, συμβολίζουμε για κάθε ακέραιο αριθμό a με $[a]_3$ και $[a]_4$ την κλάση του a modulo 3 και modulo 4 αντίστοιχα.)
(ι) Να βρεθεί ο πυρήνας του ομομορφισμού φ.
(ιι) Να βρεθεί πολυώνυμο $g(X) \in \mathbf{Z}[X]$ με $\varphi(g(X)) = \varphi(X + 2)$ και $g(0) \neq 2$.

4. Έστω $\sigma, \tau \in S_6$, όπου
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$
(ι) Να βρεθεί η ανάλυση του σ^{2003} σε γινόμενο ξένων κύκλων.
(ιι) Εξετάστε αν οι ομάδες $<\sigma>$ και $<\tau>$ είναι ισόμορφες.

5. Θεωρούμε δυο πεπερασμένες ομάδες G και H με τάξεις 12 και 21 αντίστοιχα (δηλαδή, $|G| = 12$ και $|H| = 21$) και έναν ομομορφισμό ομάδων $\varphi : G \longrightarrow H$.
(ι) Να δειχτεί ότι η υποομάδα $Im\,\varphi$ της H έχει τάξη 1 ή 3 και $\varphi(g^3) = 1 \in H$ για κάθε $g \in G$.
(ιι) Είναι η φ 1-1·

Η σωστή (και σωστά τεκμηριωμένη) απάντηση σε καθένα από τα παραπάνω θέματα αξίζει 2.2 μονάδες. Η βάση επιτυχίας για την εξέταση είναι οι 5 μονάδες.

Ονοματεπώνυμο: ____________________ **Α.Μ.:** ____________________

Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου 2003
Άλγεβρα Α

Ομάδα γ

1. (ι) Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί k και l, έτσι ώστε $10k + 6l = 16$.
(ιι) Ποιές από τις παραπάνω τιμές του k είναι τέτοιες ώστε η κλάση του k modulo 5 είναι αντιστρέψιμη στο δακτύλιο $\mathbf{Z}_5$·

2. Να βρεθούν πολυώνυμα $f(X), g(X) \in \mathbf{Z}_5[X]$, τέτοια ώστε $X^4 + 4X^2 + 3 = (X^2 + X + 1) \cdot f(X) + (X + 1) \cdot g(X)$.

3. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων
$$\varphi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{25},$$
που είναι τέτοιος ώστε
$$\varphi(a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0) = ([a_0]_2, [a_0]_{25})$$
για κάθε πολυώνυμο $a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$. (Εδώ, συμβολίζουμε για κάθε ακέραιο αριθμό a με $[a]_2$ και $[a]_{25}$ την κλάση του a modulo 2 και modulo 25 αντίστοιχα.)
(ι) Να βρεθεί ο πυρήνας του ομομορφισμού φ.
(ιι) Να βρεθεί πολυώνυμο $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ με $\varphi(f(X)) = \varphi(X^3 + 4)$ και $f(0) \neq 4$.

4. Έστω $\sigma \in S_6$, όπου
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$
(ι) Να βρεθεί η τάξη της ομάδας $<\sigma^{2003}>$.
(ιι) Εξετάστε αν οι ομάδες $\mathbf{Z}_4$ και $<\sigma>$ είναι ισόμορφες.

5. Θεωρούμε δυο πεπερασμένες ομάδες G και H με τάξεις 15 και 20 αντίστοιχα (δηλαδή, $|G| = 15$ και $|H| = 20$) και έναν ομομορφισμό ομάδων $\varphi : G \longrightarrow H$.
(ι) Να δειχτεί ότι η υποομάδα $Im\,\varphi$ της H έχει τάξη 1 ή 5 και $\varphi(g^5) = 1 \in H$ για κάθε $g \in G$.
(ιι) Είναι η φ 1-1·

Η σωστή (και σωστά τεκμηριωμένη) απάντηση σε καθένα από τα παραπάνω θέματα αξίζει 2.2 μονάδες. Η βάση επιτυχίας για την εξέταση είναι οι 5 μονάδες.

Ονοματεπώνυμο: ________________________ **Α.Μ.:** ________________________

Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου 2003
Άλγεβρα Α

Ομάδα δ

1. (ι) Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί w και z, έτσι ώστε $3w + 5z = 8$.
(ιι) Ποιές από τις παραπάνω τιμές του z είναι τέτοιες ώστε η κλάση του z modulo 5 είναι αντιστρέψιμη στο δακτύλιο $\mathbf{Z}_5$·

2. Να βρεθούν πολυώνυμα $a(X), b(X) \in \mathbf{Q}[X]$, τέτοια ώστε $Q^6 + 4Q^3 + 3 = (X^3 + 1) \cdot a(X) + (X^2 + 1) \cdot b(X)$.

3. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων
$$\varphi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_4,$$
που είναι τέτοιος ώστε
$$\varphi(a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0) = ([a_0]_5, [a_0]_4)$$
για κάθε πολυώνυμο $a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$. (Εδώ, συμβολίζουμε για κάθε ακέραιο αριθμό a με $[a]_5$ και $[a]_4$ την κλάση του a modulo 5 και modulo 4 αντίστοιχα.)
(ι) Να βρεθεί ο πυρήνας του ομομορφισμού φ.
(ιι) Να βρεθεί πολυώνυμο $g(X) \in \mathbf{Z}[X]$ με $\varphi(g(X)) = \varphi(X^3 + 1)$ και $g(0) \neq 1$.

4. Έστω $\sigma \in S_6$, όπου
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & a & b & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$
(ι) Να βρεθεί η τάξη της ομάδας $<\sigma^{101}>$.
(ιι) Να βρεθούν οι a και b, έτσι ώστε η μετάθεση σ να είναι άρτια.

5. Θεωρούμε δυο πεπερασμένες ομάδες G και H με τάξεις 21 και 28 αντίστοιχα (δηλαδή, $|G| = 21$ και $|H| = 28$) και έναν ομομορφισμό ομάδων $\varphi : G \longrightarrow H$.
(ι) Να δειχτεί ότι η υποομάδα $Im\,\varphi$ της H έχει τάξη 1 ή 7 και $\varphi(g^7) = 1 \in H$ για κάθε $g \in G$.
(ιι) Είναι η φ 1-1·

Η σωστή (και σωστά τεκμηριωμένη) απάντηση σε καθένα από τα παραπάνω θέματα αξίζει 2.2 μονάδες. Η βάση επιτυχίας για την εξέταση είναι οι 5 μονάδες.

Ονοματεπώνυμο: ____________________ **Α.Μ.:** ____________________