Ασκήσεις 2.1

Άσκηση 6. $m \in 12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z}$ ανν $12|m$ και $18|m$. Αλλά αν $12|m$ και $18|m$ τότε εκπ$(12,18)|m$ απ' τον ορισμό του εκπ. Επομένως $36|m$. Αντίστροφα αν $36|m$ τότε $12|m$ και $18|m$. Επομένως $12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z}$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = e\mathbb{Z}$ όπου $e =$εκπ(a,b)

Άσκηση 7. i) R μεταθετικός ανν $ab = ba$ για κάθε $a, b \in R$. Άρα, απ' τον ορισμό του $C(R)$, R μεταθετικός ανν $a \in C(R)$ για κάθε $a \in R$ δηλ. $R = C(R)$.

ii) Αν $a, b \in C(R)$ τότε $(a-b)r = ar - br = ra - rb = r(a-b)$ δηλ. $a - b \in R$. Επίσης $(ab)r = a(br) = a(rb) = (ar)b = (ra)b = r(ab)$ δηλ. $ab \in R$. Από την πρόταση 2.1.10 έπεται ότι $C(R)$ υποδακτύλιος του R.

(iii)Παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Άρα αν $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ανήκει στο $C(R)$ έχουμε: $c = 0, d = a$. Όμοια πολλαπλασιάζοντας με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ βλέπουμε ότι $b = 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ az & at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ Συμπεραίνουμε ότι

$$C(M_2(\mathbb{R})) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$$

iv) Με όμοιο τρόπο όπως στο (iii) βλέπουμε ότι

$$C(M_n(\mathbb{R})) = \{\begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$$

Άσκηση 9.

$(r+s)^2 + (r+s) = (r^2 + sr + rs + s^2) + (r+s) = (r^2 + r) + (s^2 + s) + (rs + sr)$

Άρα $rs + sr = [(r+s)^2 + (r+s)] - [(r^2 + r) + (s^2 + s)]$ επομένως $rs + sr \in C(R)$.

Έχουμε:

$$r(rs + sr) = (rs + sr)r \Rightarrow r^2 s + rsr = rsr + sr^2 \Rightarrow r^2 s = sr^2$$

για κάθε $s \in R$.

Άρα $r^2 \in C(R)$ για κάθε $r \in R$. Αλλα $C(R)$ είναι δακτύλιος (άσκ.7), επομένως $r \in C(R)$ για κάθε $r \in R$ και R μεταθετικός.

Άσκηση 12. $(a+a)(a+a) = a+a \Rightarrow a^2+a^2+a^2+a^2 = a+a \Rightarrow 4a = 2a \Rightarrow 2a = 0$ για κάθε $a \in R$. Εχουμε:

$$(a+b)^2 = a+b \Rightarrow a^2+b^2+ab+ba = a+b \Rightarrow ab+ba = 0 \Rightarrow 2ab+ba = ab \Rightarrow ba = ab$$

για κάθε $a, b \in R$. Άρα R μεταθετικός.

Άσκηση 20. Υπόδειξη: $\frac{1}{a+b\sqrt{d}} = \frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-db^2}$