# Ο ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ Ο ΧΡΟΝΟΣ

**1. Γενικές αρχές.** Η αντιληπτική μας ικανότητα του Φυσικού Χώρου, μας οδηγεί στον προσδιορισμό των σημείων του, μέσω τριών ανεξαρτήτων παραμέτρων. Είναι, λοιπόν, αποδεκτή η απεικόνισή του, από έναν τρισδιάστατο πραγματικό συσχετισμένο (Affine) Ευκλείδειο χώρο (βλέπε ενότητα "Γεωμετρικές Εφαρμογές"), ο οποίος προφανώς υλοποιείται από τον $\mathbb{R}^3$ (με ένα π.χ καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων). Εισάγουμε ακόμα μία παράμετρο $t \in \mathbb{R}$, και, δεχόμεθα (μια και έτσι αντιλαμβανόμεθα τον φυσικό χώρο) ότι όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$, χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της παραμέτρου t. Καλούμε αυτήν την τιμή της t "παρόν". Εξ' ορισμού, συνεπώς, τον φυσικό χώρο τον αντιλαμβανόμεθα ως παρόν. Ένα σημείο του $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ η θέση του οποίου προσδιορίζεται από τις παραμέτρους π.χ. $(x, y, z, t)$ (Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς K) καλείται γεγονός. Η ικανότητα που ο άνθρωπος διαθέτει να ανακαλεί και να αναπαριστά (κατά το δυνατόν) τον φυσικό χώρο για διάφορες τιμές του t, μας δίδει την δυνατότητα να νοούμε το "παρελθόν" και το "μέλλον".

Ένα υλικό σημείο m λέμε ότι κινείται αν μεταβάλει την θέση του, μέσα στο αντιληπτικό πεδίο του παρατηρητού. Η κίνηση αυτή, είναι δυνατόν να περιγραφή ως εξής: α) Ο παρατηρητής παραμένει στην θέση $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o, t_o)$ και καταγράφει δύο θέσεις του m, τις $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ και $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ στο σύστημα K. Το m κινείται αν και μόνον αν $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$. Με $\delta = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ συμβολίζουμε το διάστημα κατά μήκος του οποίου κινήθηκε το m. Με $\delta_1$ συμβολίζουμε την απόσταση του m από τον παρατηρητή όταν ευρίσκεται στην θέση $\vec{r}_1$, και με $\delta_2$ την αντίστοιχη απόσταση του m όταν ευρίσκεται στην θέση $\vec{r}_2$. Εφ' όσον $\delta_1 < \delta_2$, λέμε ότι το m απομακρύνεται από τον παρατηρητή. Εφ' όσον $\delta_1 > \delta_2$, λέμε ότι το m πλησιάζει τον παρατηρητή. Εφ' όσον $\delta_1 = \delta_2$, λέμε ότι το m στρέφεται ως προς τον παρατηρητή. β) Το m παραμένει στην θέση $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o, t_o)$ και ο παρατηρητής καταγράφει δύο διαφορετικές θέσεις του m στο σύστημα $K'$, τις $\vec{r}_1^{\,'} = (x_1^{'}, y_1^{'}, z_1^{'}, t_1^{'})$ και $\vec{r}_2^{\,'} = (x_2^{'}, y_2^{'}, z_2^{'}, t_2^{'})$. Για να έχουμε περιγραφή του ιδίου φαινομένου, θα πρέπει $\delta' = \delta$, το "απομακρύνεται " πρέπει να αντικατασταθεί με το " πλησιάζει", και το "στρέφεται", με το στρέφεται κατ' αντίστροφη φορά. Τις μετρήσεις αυτές τις χαρακτηρίζουμε λέγοντας ότι το μήκος δ παραμένει αναλλοίωτο ως προς τις μετρήσεις μας στα συστήματα K και $K'$, οι μετρήσεις στο $K'$ μεταβάλλονται κατά covariant τρόπο ως προς τις μετρήσεις που γίνονται στο σύστημα K, ενώ οι μετρήσεις στο σύστημα K μεταβάλλονται κατά contravarient τρόπο ως προς τις μετρήσεις που γίνονται στο σύστημα $K'$.

Ο χώρος, τέλος, υποτίθεται ότι είναι ομογενής και ισότροπος. Τούτο σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του, και προς κάθε διεύθυνση, τα γεγονότα εξελίσσονται κατά τον ίδιο τρόπο.

**Χώρος Χρόνος Κίνηση στον Νεύτωνα**. (Βλέπε **Newton's** Views on Space, **Time**, and Motion (Stanford Encyclopedia **...**)

**Οι Νόμοι του Νεύτωνος.** 1$^{ος}$. Ένα σώμα μάζης m κινείται με σταθερή ταχύτητα, εφ' όσον επ' αυτού ασκείται μηδενική δύναμης. 2$^{ος}$ Η αλλαγή της κίνησης του σώματος είναι ανάλογος της ασκούμενης δύναμης. 3$^{ος}$ Οι δυνάμεις δράσεως και αντιδράσεως έχουν μηδενικό άθροισμα. Η έννοιες της μάζας, και της κίνησης είναι θεμελιώδεις. Ο Νεύτων τις αντιλαμβάνεται ως εξής: 1. Η ποσότης ύλης που περιέχεται σε ένα σώμα, μετράται από την πυκνότητα και τον όγκο του. Αυτή ορίζεται ως μάζα του σώματος. Είναι γνωστή και ως βάρος του σώματος. Το γεγονός ότι η μάζα είναι ανάλογος του βάρους έχει καθιερωθεί με πολλά και πολύ ακριβή πειράματα. 2. Η ποσότητα κίνησης ενός σώματος, μετράται από την ταχύτητα του και την μάζα του. (Για τον Νεύτωνα, κίνηση = ορμή) 3. Η αδρανειακή δύναμης της ύλης, είναι εκείνη, την οποία εμφανίζει κάθε σώμα ως αντίσταση στην μεταβολή της κινητικής του καταστάσεως είτε αυτό βρίσκεται σε στάση, είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. 4. Μία εξωτερική δύναμης είναι μία ενέργεια που γίνεται πάνω σε ένα σώμα, αποβλέποντας στην μεταβολή της κινητικής του καταστάσεως.

**2. Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.** Θεωρούμε τα δύο καρτεσιανά συστήματα αναφοράς K και $K'$ και υποθέτουμε ότι το $K'$ κινείται παραλλήλως προς εαυτό κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος με σταθερή ταχύτητα $\upsilon$. Η Νευτώνεια Μηχανική υποθέτει ότι ένα γεγονός καταγράφεται στα συστήματα K και $K'$ κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε τις σχέσεις

$$x' = x - \upsilon_x t,\ y' = y - \upsilon_y t,\ z' = z - \upsilon_z t,\ t' = t \qquad (1)$$

ή $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}t + \vec{r}_0$, όπου $r_0'$ η αρχική θέση του συστήματος $K'$. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αν $\vec{p} = m_0\vec{v}$ η ορμή του υλικού σημείου $m_0$ η δύναμη $\vec{F} = \frac{dp}{dt} = m_0 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}'$, μια και $\vec{v}, \vec{r}_0, m_0$, σταθερά και $t' = t$.

Το διάστημα που διανύει ένα κινητό από το σημείο $\vec{r}_1$ στο σημείο $\vec{r}_2$ με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = \upsilon\vec{r}$ είναι ανάλογο του χρόνου, που απαιτείται. Είναι, λοιπόν, στο σύστημα K, $\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \upsilon^2 (t_2 - t_1)^2$ με ανάλογη σχέση εκφρασμένη στο σύστημα $K'$ και, επειδή η παράμετρος t ταυτίζεται στα δύο συστήματα, έχουμε το αναλλοίωτο του μήκους δ.

Έστω ότι το $K'$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = \upsilon\vec{i}$ κατά μήκος του άξονα Ox και παραλλήλως προς εαυτό. υ είναι η ταχύτητα του συστήματος $K'$, όπως αυτή μετράται στο σύστημα K. Ένα υλικό σημείο m κινείται κατά μήκος του άξονα $O'x'$ με ταχύτητα, όπως αυτή μετράται στο σύστημα $K'$, $u'$. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (1), η ταχύτητα του m όπως μετράται από το σύστημα K, είναι $u = \upsilon + u'$, ή $u' = u - \upsilon$.

Ο Γαλιλαίος μελέτησε πειραματικά την πτώση των σωμάτων και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όλα τα σώματα, ανεξαρτήτως μάζης, πίπτουν κατακόρυφα με την αυτή επιτάχυνση g. Είναι, δηλαδή, $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$. Εισάγουμε την έννοια του δυναμικού $U = gz$, οπότε και $\frac{dU}{dz} = g$. Άρα και $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dU}{dz}$.

Η κινητική ενέργεια T του υλικού σημείου m όταν μετακινείται από το σημείο A στο σημείο B, υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}$, ορίζεται από την σχέση $T = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Είναι,

$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 2\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2\vec{F}}{m}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$, μια και $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ($2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα).

Άρα, και $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt$. Αν υ το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ του υλικού σημείου m, είναι και, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{m}{2}d\upsilon^2$, δηλαδή, $T = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_B^2 - \upsilon_A^2\right)$. Στην περίπτωση, που το $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι ολικό διαφορικό κάποιας συναρτήσεως $U = U(\vec{r})$, έχουμε, τότε, τελικά, ότι $\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + U_B = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + U_A$. Ο Νεύτων χρησιμοποίησε ως συνάρτηση U την $U = \frac{k}{r}$, μια και είχε ως πειραματικό δεδομένο, ότι η επιτάχυνση ενός υλικού σώματος m, που βρίσκεται σε πτώση προς το σώμα M, είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου της αποστάσεως r του m, από το M. Δηλαδή, ότι $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{k}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$. Πράγματι, γι' αυτήν την U, ισχύει ότι $dU = k\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = k\nabla U \cdot d\vec{r}$ με, $\nabla U = -\frac{k}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, οπότε, και $\vec{F} = -\frac{k'}{r^2}\vec{e}$, $k' = mM$, $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\vec{r}$. (Αυτός είναι ο νόμος της παγκοσμίου έλξεως).

**3. Μετασχηματισμοί του Lorentz.** Ζητάμε να βρούμε τους πιο γενικούς ορθογώνιους μετασχηματισμούς από το K στο $K'$, οι οποίοι θα διατηρούν την έκφραση

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \qquad (2)$$

αναλλοίωτη, όπου c σταθερά (η ταχύτης του φωτός), όταν το σύστημα $K'$ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το σύστημα K. Η σχέση (2) προκύπτει από την παρατήρηση ενός σφαιρικού οπτικού κύματος, που μεταδίδεται με την ταχύτητα c, η οποία είναι η αυτή και στα δύο συστήματα. Η σχέση, που συνδέει την έκφραση (2) στα συστήματα K και $K'$, θα είναι της μορφής

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = f(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \vec{v})$$

λόγω της ομογένειας του χώρου.
Επειδή θέλουμε να μη εξαρτάται από την διεύθυνση του $\vec{v} = \upsilon\vec{r}$, (το ισότροπο του χώρου) καταλήγουμε στην $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = f(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \upsilon)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι στο σύστημα K όπως και στο σύστημα $K'$, η (2) λαβαίνει ταυτόχρονα την τιμή 0. Υποχρεωτικά, συνεπώς, έχουμε ότι $\delta'^2 = k(\upsilon)\delta^2 = k(-\upsilon)\delta^2$. Τελικά, λοιπόν, η (2) γράφεται και $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, όπου $w = ict$, και είναι η έκφραση που θα πρέπει να είναι αναλλοίωτος ως προς τους πιο γενικούς ορθογώνιους γραμμικούς μετασχηματισμούς που ψάχνουμε.
Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός που ψάχνουμε, είναι ο

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

με, (συνθήκες ορθογωνιότητας) $\sum_{i,j=1}^{4} \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$, όπου $\vec{a}_i$ το διάνυσμα γραμμή του παραπάνω πίνακα, $\sum_{i,j=1}^{4} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$, $\vec{b}_i$ το διάνυσμα κολώνα, $\delta_{ij}$ το δ του Kronecker.
Υποθέτουμε ότι έχουμε κίνηση μόνο κατά μήκος του Ox άξονα.
Είναι, τότε,

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + 0y + 0z + a_{14}w \\ y' &= \quad 0x + 1y + 0z + \ \ 0w \\ z' &= \quad 0x + 0y + 1z + \ \ 0w \\ w' &= a_{41}x + 0y + 0z + a_{44}w \end{aligned} \qquad (3)$$

Λόγω ορθογωνιότητας είναι, $a_{11}^2 + a_{14}^2 = 1$, $a_{41}^2 + a_{44}^2 = 1$, $a_{11}^2 + a_{41}^2 = 1$, $a_{14}^2 + a_{44}^2 = 1$ ως επίσης και $a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44} = 0$ και $a_{11}a_{41} + a_{14}a_{44} = 0$.

Έχουμε $x' = a_{11}x + a_{14}w = a_{11}\left(x + \frac{a_{14}}{a_{11}}w\right) = a_{11}\left(x + \frac{a_{14}}{a_{11}}ict\right)$. Όταν η αρχή του συστήματος $K'$ συμπέσει με αυτήν του K, $x' = 0$, άρα $0 = a_{11}\left(x + \frac{a_{14}}{a_{11}}ict\right)$ απ' όπου $x = -\frac{a_{14}}{a_{11}}ict$. Η (σταθερή) ταχύτητα υ κατά μήκος του Ox άξονα είναι $\frac{dx}{dt} = \upsilon = -\frac{a_{14}}{a_{11}}ic$. Άρα και $\frac{a_{14}}{a_{11}} = i\frac{\upsilon}{c} = i\beta$ (β σταθερά).

Η σχέση $a_{11}^2 + a_{14}^2 = 1$ δίδει την $a_{11}^2(1 + a_{14}^2) = 1$ ή $a_{11}^2\left(1 + \frac{a_{14}^2}{a_{11}^2}\right) = 1$ ή $a_{11}^2\left(1 - \beta^2\right) = 1$, ή $a_{11} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$. Επειδή $c > 0$, $\frac{\upsilon}{c} \to 1$ για τιμές $\upsilon > 0$, συνεπώς, μόνο την $a_{11} > 0$.

Είναι, λοιπόν, $a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, οπότε και $a_{14}^2 = 1 - \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{(i\beta)^2}{1-\beta^2}$, ή $a_{14} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Εύκολα, τώρα, υπολογίζουμε και τα στοιχεία $a_{41} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ και $a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Ο μετασχηματισμός (3) είναι, λοιπόν, ο

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x + 0y + 0z + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}ict = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x - \upsilon t\right) = \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= \quad 0x + 1y + 0z + \ \ 0ict \\ z' &= \quad 0x + 0y + 1z + \ \ 0ict \\ ct' &= \frac{-i\beta}{i\sqrt{1-\beta^2}}x + 0y + 0z + \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\beta x + ct\right) = \gamma\left(ct - \beta x\right) \end{aligned}$$

Όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Με αντίστροφο τον

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x'+\upsilon t')=\gamma x'+\gamma\beta w'$$
$$y=y'$$
$$z=z'$$
$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(t'+\frac{\beta}{c}x')=\gamma\beta x+\gamma w'$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί γράφονται και στην μορφή, με $w=ct$,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\w'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\gamma\beta&0&0&-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\quad\text{και}\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\w'\end{pmatrix}\quad(4)$$

Ένα μήκος δ, που βρίσκεται κατά μήκος του Ox άξονα, όταν το μετράμε στο σύστημα K έχει μέτρο $\delta=x_2-x_1$. Το ίδιο μήκος όταν μετράται στο σύστημα K′ έχει μήκος $\delta=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left((x_2'-x_1')-\upsilon(t_2'-t_1')\right)$. Εφ’ όσον η μέτρηση των συντεταγμένων των άκρων γίνεται την ίδια στιγμή, το μήκος που μετράμε έχει την έκφραση $\delta'=\sqrt{1-\beta^2}\left(x_2-x_1\right)=\delta\sqrt{1-\beta^2}$ (5).

Για τα χρονικά διαστήματα έχουμε, $t_2'-t_1'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left((t_2-t_1)+\frac{\upsilon}{c^2}(x_2-x_1)\right)$. (6)

Οι αντίστροφες σχέσεις των (4) και (5) είναι

$$dx=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dx'+\upsilon dt'\right)\text{ και }dt=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\upsilon}{c^2}dx'+dt'\right).\quad(7)$$

Η ταχύτητα $u'$ στο K′ σύστημα ορίζεται ως $u'=\frac{dx'}{dt'}$. Όμως, $x'=\varphi_1(x,t)$, $t'=\varphi_2(x,t)$, με, $x'=\phi_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x-\upsilon t\right)$ και $t'=\phi_2(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right)$.

Είναι,

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x-\upsilon t\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x-\upsilon t\right)+\left(x-\upsilon t\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x-\upsilon t\right)\right)=\frac{-\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Άρα, $dx'=\frac{\partial\phi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi_1}{\partial t}dt=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dx-\upsilon dt\right)$ (8)

Επίσης,

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\upsilon}{c^2}\right)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)\right) = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Άρα, $dt' = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi_2}{\partial t}dt = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{-\upsilon}{c^2}dx + dt\right).$ (9)

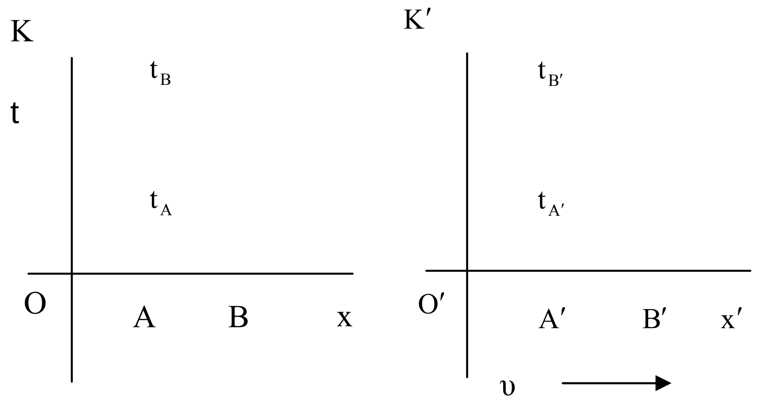
Είναι, λοιπόν,

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \upsilon dt}{-\upsilon / c^2 dx + dt} = \frac{u - \upsilon}{(-\upsilon / c^2)(dx/dt) + 1} = \frac{u-\upsilon}{-\upsilon u / c^2 + 1} = \frac{u-\upsilon}{1 - u\upsilon / c^2} \quad (10)$$

**4. Ο χώρος του Minkowski.** Πρόκειται για τον συσχετισμένο (affine) χώρο (βλέπε ενότητα Γεωμετρικές Εφαρμογές) $\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την μετρική

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (11)$$

όπου $w = ict$. Στον χώρο αυτόν, θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς K και $K'$:




Το $K' = \{O', (x', y', z', t')\}$ και το $K = \{O, (x, y, z, t)\}$.

**Η διαστολή του χρόνου.** Υποθέτουμε ότι, το $K'$ κινείται παραλλήλως προς εαυτό κατά μήκος του άξονα Ox του συστήματος K, με σταθερή ταχύτητα υ.

**(Προσοχή!** Η υπόθεση αυτή, ουσιαστικά δέχεται την δυνατότητα παράλληλης μεταφοράς στον χώρο. Το πως γίνεται αυτή η παράλληλος μεταφορά, καθορίζει και την γεωμετρία του χώρου, ως επίσης και κάθε άλλη έννοια, που εμπεριέχει διαστήματα δ. Π.χ. το δυναμικό U ενός υλικού σημείου.)

Ένα φωτεινό σήμα εκπέμπεται από την θέση $A(x_A)$ προς την θέση $B(x_B)$, $\delta = |x_B - x_A|$, όπου υπάρχει κάτοπτρο, και επιστρέφει στην θέση A. Οι χρονικές στιγμές $t_A$ και $t_B$ σηματοδοτούν την έλευση του φωτεινού σήματος στις θέσεις A και B αντίστοιχα. Ένας παρατηρητής, που βρίσκεται στο σημείο A μετρά στο σύστημα K, χρόνο $\Delta t = t_B - t_A = \frac{2\delta}{c}$ . Τα σημεία $A'$, $B'$ κινούνται και αυτά με ταχύτητα υ ως προς το K. Στο σύστημα $K'$, ο χρόνος που μετράται από το K δίδεται από την σχέση $$t'_B - t'_A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\left(t_B - t_A\right) + \frac{2\upsilon}{c^2}\left(x_B - x_A\right)\right),$$

βλέπε (6), ή
$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t + \frac{2\upsilon}{c^2}\delta\right) = \frac{2\delta}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) < \frac{2\delta}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (12)$$

Επειδή $\beta^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2}$, $0 \le \beta^2 < 1$, $0 < \sqrt{1-\beta^2} \le 1$, είναι και $\Delta t' \ge \Delta t$. $\Delta t$ είναι τα χρονικά διαστήματα που μετράμε στο ακίνητο σύστημα K. $\Delta t'$ είναι τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα στο σύστημα $K'$, όπως μετρώνται από το σύστημα K. Παρατηρούμε, ότι το ένα λεπτό στο σύστημα $K'$, μετράται κατά πολύ μεγαλύτερο (ανάλογα με το πόσο η ταχύτητα υ πλησιάζει την ταχύτητα c) στο σύστημα K. Άρα, ένας ταξιδιώτης, που είναι στο σύστημα $K'$, και έχει σ' αυτό χρόνο παραμονής π.χ. ένα έτος, από το σύστημα K θα έχει μετρηθεί πολλαπλάσιος ο χρόνος παραμονής του.

**Πειραματικά δεδομένα**. Στοιχειώδη σωματίδια παραγόμενα στο εργαστήριο (μικρή ταχύτης) έχουν ελάχιστο χρόνο ζωής. Όμως σωματίδια αυτού του τύπου βρίσκονται στις κοσμικές ακτίνες (μέγιστος χρόνος ζωής – μεγάλη ταχύτης).

**Η συστολή των μηκών.** Θεωρούμε και πάλι τα συστήματα K και $K'$. Θα δούμε πως φαίνεται το μήκος $\delta' = \left|x_{B'} - x_{A'}\right|$ του συστήματος $K'$, από το σύστημα K. Έχουμε ότι, $\delta' = \sqrt{1-\beta^2}\left(x_2 - x_1\right) = \delta\sqrt{1-\beta^2}$ (προηγούμενη σχέση (5)). Άρα, το $\delta' < \delta$, για $\upsilon > 0$. Προσοχή! Στην πραγματικότητα, το μήκος δεν μεταβάλλεται. Απλά, αλλάζει μέσα στον χώρο Minkowski η προοπτική κάτω από την οποία εμείς, στο σύστημα K, το αντιλαμβανόμεθα.

**Η ταχύτητης.** Αν με t συμβολίζουμε την ροή του χρόνου στο σύστημα K και με $t'$ την ροή του χρόνου στο σύστημα $K'$, για ένα κινούμνο υλικό σημείο m έχουμε αντίστοιχα ταχύτητες $\vec{v}'$ και $\vec{v}$, που συνδέονται με τις σχέσεις
$$\upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt'} = \upsilon_x \frac{dt}{dt'} = \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'} = \upsilon_y \frac{dt}{dt'} = \frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'} = \upsilon_z \frac{dt}{dt'} = \frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\upsilon'_w = \frac{dw}{dt'} = \frac{cdt}{dt'} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Την ταχύτητα $\vec{v}$ του m στον χώρο Minkowski, την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες:
α) Την "χωρική" συνιστώσα (διάνυσμα)
$$\vec{v}_r = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\right) = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
και β) την "χρονική" συνιστώσα $\upsilon'_w = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

**Η ορμή** $\vec{p} = m\vec{v}$ αναλύεται και αυτή σε ένα χωρικό και ένα χρονικό μέρος. Για το χωρικό μέρος της ορμής έχουμε $\vec{p}_r = \frac{d}{d\tau}m\vec{v}_r$, ή

$$\vec{p}_r = \frac{d}{dt'}\frac{dt'}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{ή και}$$

$$\vec{p}_r\sqrt{1-\beta^2} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3).$$

Υποθέτουμε ότι, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνος $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ισχύει στον χώρο του Minkowski. Για να συμπίπτει η δύναμη $\vec{F}$ στον χώρο Minkowski, με την δύναμη $\vec{F}$ που ορίσαμε στην §2, θα πρέπει, $m_0 = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$, οπότε η $\vec{F}$ στον χώρο Minkowski έχει την έκφραση $\vec{F} = \vec{p}_r\sqrt{1-\beta^2}$. Η σχέση $m = m_0\sqrt{1-\beta^2}$ δείχνει τον τρόπο με τον οποίο σχετίζεται η μάζα m στον χώρο Minkowski, με την μάζα $m_0$ στον $\mathbb{R}^3$.
Η σχέση (3) δίδει για την δύναμη την έκφραση

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Παρατηρούμε ότι, εν $\mathbb{R}^3$, $\vec{F} = m_0\frac{d\vec{v}}{dt}$, όπως πρέπει.

Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου $m_0$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι $T_0 = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$. Η αντίστοιχη στον χώρο Minkowski θα είναι

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^2}\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2 + \upsilon_w{}^2\right) = \frac{1}{2}m_0\frac{\upsilon^2 + c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = T_0 + \frac{1}{2}m_0c^2.$$

Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου m στον χώρο Minkowski είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας $T_0 = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$ του m στον χώρο $\mathbb{R}^3$, και μιας “εσωτερικής” ενέργειας $m_0c^2$