ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

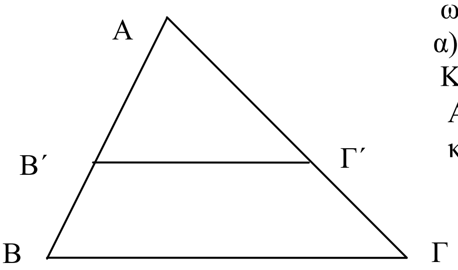
1. Όταν λέμε "γεωμετρική κατασκευή" εννοούμε την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός γεωμετρικού σχήματος της Ευκλείδειου Γεωμετρίας. Κάθε τέτοια κατασκευή, ανάγεται τελικά στην κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος με δοσμένο μήκος. Προϋποθέτουμε, βέβαια, ότι όλα τα μήκη μετρώνται από την ίδια μονάδα μήκους.

Ισοδύναμα, μια γεωμετρική κατασκευή ανάγεται στην εύρεση συγκεκριμένων σημείων πάνω σε μια ευθεία. Τέλος, αυτό είναι ισοδύναμο με την αντιστοίχηση, (χρησιμοποιώντας πάντα κανόνα και διαβήτη), σημείων σε "αριθμούς". Λέμε, τότε, ότι κατασκευάζουμε τους αριθμούς. Τι είναι αυτοί οι αριθμοί, θα γίνει φανερό απ' ότι θα πούμε παρακάτω.

2. Κατασκευάσιμα σχήματα. Πρόταση 1. Δοθέντων των ευθυγράμμων τμημάτων a και b, με μήκη αντίστοιχα α και β, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, (όπου $\alpha \geq 0$), αβ και $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Η κατασκευή των δύο πρώτων ευθυγράμμων τμημάτων βασίζεται στην ικανότητα που έχουμε να μεταφέρουμε με τον διαβήτη τα ευθύγραμμα τμήματα, και να τα τοποθετούμε σε επιλεγείσα θέση.

Η κατασκευή των δύο άλλων τμημάτων, γίνεται χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Θαλή ως εξής:



α) Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος μήκους αβ. Κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ′Γ′, έτσι ώστε, $Α\Gamma'=1$, $ΑΒ'=a$, $Α\Gamma=b$, και τμήμα Β′Γ′ παράλληλο του ΒΓ. Είναι, τότε,

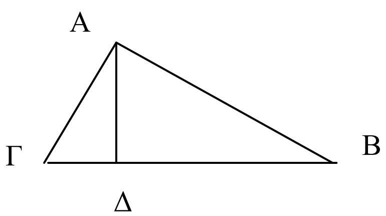
$$\frac{\alpha}{(ΑΒ)}=\frac{1}{\beta}, \text{ δηλαδή, } (ΑΒ)=\alpha\beta$$

β) Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος μήκους $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Κατασκευάζουμε το προηγούμενο σχήμα, με, $ΑΒ=a$, $Α\Gamma'=1$, $Α\Gamma=b$. Είναι, τότε, $ΑΒ'=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Πόρισμα. Κάθε ρητός αριθμός είναι κατασκευάσιμος.

Πρόταση 2. Δοθέντος του ευθυγράμμου τμήματος a με μήκος αντίστοιχα α, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\sqrt{a}$



Η κατασκευή αυτή βασίζεται στο εξής θεώρημα της Ευκλείδειου γεωμετρίας: Το τετράγωνο του μήκους (ΑΔ) του ύψους ορθογωνίου τριγώνου, που άγεται από την κορυφή Α της ορθής γωνίας, ισούται με το γινόμενο των μηκών των τμημάτων, στα οποία αυτό χωρίζει την υποτείνουσα. Έτσι, είναι, για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $(Α\Delta)^2=(Β\Delta)(\Delta\Gamma)$.

Αρκεί, λοιπόν, να λάβουμε την υποτείνουσα ΒΓ του κύκλου με μήκος $(Β\Gamma)=(Β\Delta)+(\Delta\Gamma)=1+\alpha$

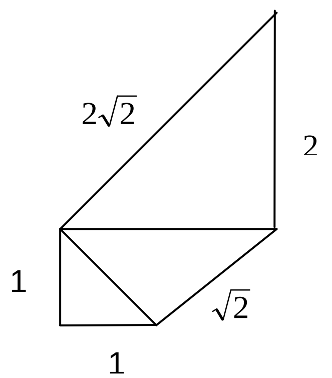
Συνοψίζοντας, μέχρις εδώ, είδαμε τα εξής: Αν F είναι κάποιο σώμα, τα στοιχεία του οποίου είναι κατασκευάσιμα, τότε και κάθε άλλο στοιχείο της μορφής $a+b\sqrt{k}$, όπου $a,b,k\in F$ και $k>0$ είναι κατασκευάσιμο. Επιπλέον, όλα τα στοιχεία της μορφής $a+b\sqrt{k}$ αποτελούν σώμα, όπως εύκολα αποδεικνύεται. Το σώμα αυτό το συμβολίζουν με $F(\sqrt{k})$, και το καλούν

τετραγωνική επέκταση του σώματος F. Βέβαια, αν συμβαίνει να είναι $\sqrt{k} \in F$, είναι και, $F = F(\sqrt{k})$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, που είναι $\sqrt{k} \notin F$, είναι και $F \subset F(\sqrt{k})$. Για τον λόγο αυτόν, ονομάζουμε το $F(\sqrt{k})$ ***επέκταση*** του F.
Το σύνολο $\mathcal{L}$ των κατασκευάσιμων αριθμών, είναι, λοιπόν, ένα υπόσωμα του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών σταθερό ως προς την πράξη «εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας» (δηλαδή, με $a \in \mathcal{L}$ και $\sqrt{a} \in \mathcal{L}$).

Φανερά, τώρα, και η τετραγωνική επέκταση μιας τετραγωνικής επέκτασης, περιέχει στοιχεία κατασκευάσιμα. Έχουμε, συνεπώς, την πρόταση:

Πρόταση. Ένα στοιχείο a κάποιου σώματος F_n είναι κατασκευάσιμο, αν υπάρχει μία ακολουθία τετραγωνικών επεκτάσεων που να εκτείνεται από το F στο F_n: $F \subset \ldots \subset F_n$, με F σώμα που περιέχει κατασκευάσιμα στοιχεία.

Το σώμα F λοιπόν, μπορεί να είναι το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, μια και αυτό είναι το πιο "μικρό" σώμα, όλα τα στοιχεία του οποίου, όπως είδαμε, είναι κατασκευάσιμα.
Για παράδειγμα, έχουμε την εξής κατασκευή:



Τίθεται, τώρα, το ερώτημα: Μήπως υπάρχουν και στοιχεία, που να είναι κατασκευάσιμα, αλλά να μη ανήκουν σε κάποια τετραγωνική επέκταση του $\mathbb{Q}$; Η απάντηση είναι αρνητική. Τούτο προκύπτει από το γεγονός ότι τα σημεία που κατασκευάζουμε, είναι τομές ευθειών, ή τομές κύκλων, ή τομές ευθειών και κύκλων. Όμως, τα σχήματα αυτά, οι ευθείες και οι κύκλοι, δηλαδή, εκφράζονται με εξισώσεις $f(x, y) = 0$ το πολύ δευτέρου βαθμού. Άρα, και η λύσεις (x, y) των συστημάτων που εκφράζουν τις τομές των σχημάτων αυτών, θα είναι το περισσότερο τετραγωνικές εκφράσεις των συντελεστών των εξισώσεων των σχημάτων αυτών. Οι συντελεστές αυτοί είναι όμως κατασκευάσιμοι. Άρα και οι τομές κατασκευάσιμες και ανήκουν σε κάποια τετραγωνική επέκταση του αρχικού σώματος.

Ένα σχήμα είναι, λοιπόν, κατασκευάσιμο, ανν τα μήκη των ευθηγράμμων τμημάτων από τα οποία αυτό αποτελείται είναι στοιχεία κάποιου σώματος, το οποίο είναι τετραγωνική επέκταση του σώματος των ρητών αριθμών.

3. Ο διπλασιασμός του κύβου. Το πρόβλημα της κατασκευής κύβου όγκου διπλασίου δοθέντος όγκου, είναι γνωστό από μία επιστολή του Ερατοσθένη. Ας δούμε αν μπορούμε να το λύσουμε. Αν η ακμή του δοθέντος κύβου είναι α, ο όγκος του θα είναι $V = \alpha^3$. Για να κατασκευάσουμε κύβο με όγκο $2V = 2\alpha^3$, θα πρέπει να λάβουμε ακμή μήκους $\alpha\sqrt[3]{2}$. Το πρόβλημα συνεπώς τελικά ανάγεται στην κατασκευασιμότητα ή όχι του αριθμού $\sqrt[3]{2}$.
Σχετικά, έχουμε την πρόταση:

Πρόταση. Έστω $F(\sqrt{k})$ η τετραγωνική επέκταση ενός σώματος F. Αν $\sqrt[3]{2} \in F(\sqrt{k})$, τότε αναγκαστικά $\sqrt[3]{2} \in F$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε γράφοντας ότι αν $\sqrt[3]{2} \in F(\sqrt{k})$ τότε και $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{k}$, $\sqrt{k} \notin F$, γιατί, αν $\sqrt{k} \in F$, και $\sqrt[3]{2} \in F$, όπως θέλουμε να δείξουμε. Θα δείξουμε ότι $b = 0$. Είναι

$$2 = (a + b\sqrt{k})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{k} + 3ab^2k + b^3k\sqrt{k}$$
$$= [a^3 + 3ab^2k] + [3a^2b + b^3k]\sqrt{k}$$

Αν ο συντελεστής του $\sqrt{k}$ είναι διάφορος του μηδενός, μπορούμε να λύσουμε την προηγούμενη ισότητα ως προς $\sqrt{k}$, και να έχουμε ότι, $\sqrt{k} \in F$, πράγμα αδύνατον.

Πρόταση. Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είναι αδύνατον.

Απόδειξη. Όπως είδαμε, το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με την κατασκευή του $\sqrt[3]{2}$. Στην περίπτωση, που ο αριθμός αυτός είναι κατασκευάσιμος,, θα είναι στοιχείο κάποιου σώματος F_n. Υπάρχει, τότε, μια ακολουθία από τετραγωνικές επεκτάσεις, που εκτείνεται από το $\mathbb{Q}$ στο F_n. Μιά εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης δείχνει ότι, ο $\sqrt[3]{2} \in F_{n-1}$, κλπ., τελικά ο $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$, πράγμα άτοπον.

4. Η τριχοτόμηση της γωνίας. Αναφερόμεθα, βέβαια, σε τυχούσα γωνία. Καλούμε 3θ την γωνία που θέλουμε να τριχοτομήσουμε. Για την θ έχουμε, τότε, ότι,

$$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$
$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - 2\sin\theta\sin\theta c s\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Το πρόβλημα, λοιπόν, της τριχοτόμησης της γωνίας 3θ, είναι ισοδύναμο με την κατασκευή μιάς πραγματικής ρίζας της εξισώσεως $4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0$ (1΄).

Θα δείξουμε ότι, για γωνίες 20^o η κατασκυή αυτή είναι αδύνατη.

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$, και η κατασκευή της 3θ είναι εύκολη. Η (1΄), τώρα, γίνεται $8u^3 - 6u - 1 = 0$, ή αν θέσουμε $x = 2u$, $x^3 - 3x - 1 = 0$ (1).

Πρόταση. Αν η εξίσωση $x^3 - 3x - 1 = 0$ έχει ρίζα μέσα σε ένα σώμα $F(\sqrt{k})$, τότε έχει ρίζα εν F.

Απόδειξη. Έστω ότι η (1) έχει ρίζα ρ εν $F(\sqrt{k})$. Τότε, $\rho = a + b\sqrt{k}$. Αν $b = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε, ότι $b \neq 0$. Είναι, τότε, $(a + b\sqrt{k})^3 - 3(a + b\sqrt{k}) - 1 = 0$. Κάνουμε τις πράξεις, τακτοποιούμε, και βρίσκουμε ότι,

$$[a^3 + 3ab^2k - 3a - 1] + [3a^2b + b^3k - 3b]\sqrt{k} = 0 \qquad (2)$$

Η σχέση (2) μας οδηγεί στο σύστημα

$$a^3 + 3ab^2k - 3a - 1 = 0$$
$$3a^2 + b^2k - 3 = 0$$

μια και από υπόθεση, $b \neq 0$. Λύνουμε την δεύτερη εξίσωση ως προς b^2k και αντικαθιστούμε στην πρώτη, οπότε, τελικά, λαβαίνουμε την $(-2a)^3 - 3(-2a) - 1 = 0$ (3). Η σχέση αυτή, μου λέει ότι ο $-2a \in F$ είναι ρίζα της (1).

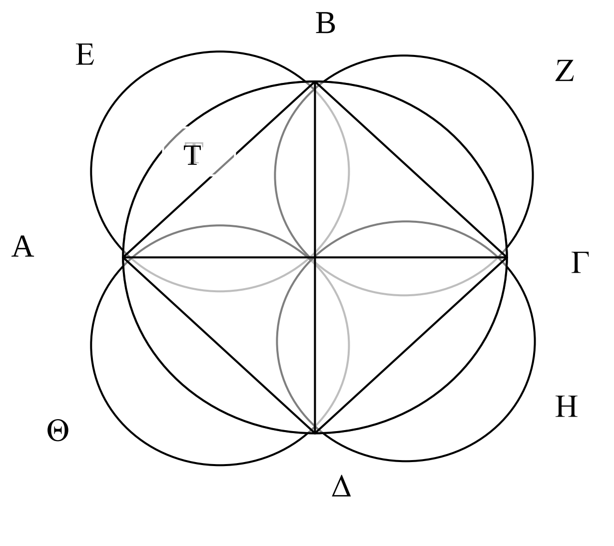
Πρόταση. Η ρίζα ρ της (1) δεν είναι κατασκευάσιμη.
Απόδειξη. Στην περίπτωση, που ο αριθμός αυτός ρ είναι κατασκευάσιμος,, θα είναι στοιχείο κάποιου σώματος F_n. Υπάρχει, τότε, μια ακολουθία από τετραγωνικές επεκτάσεις, που εκτείνεται από το $\mathbb{Q}$ στο F_n. Μιά εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης δείχνει ότι, τελικά η (1) έχει ρίζα εν $\mathbb{Q}$, πράγμα άτοπον.

Πράγματι, αν $\rho = \frac{p}{q}$ με $(p,q)=1$, τότε και, $p^3 - 3pq^2 - q^3 = 0$. Οι p, q έχουν τις εκφράσεις $p^3 = q(3pq + q^2)$ και $q^3 = p(p^2 - 3q^2)$. Αν ο q έχει πρώτο παράγοντα ρ_1, τότε και, $\rho_1 | p^3$, και συνεπώς $\rho_1 |\ p$. Αν ο p έχει πρώτο παράγοντα ρ_2, τότε και $\rho_2 | q^3$, και συνεπώς $\rho_2 | q$. Όμως, λόγω της $(p,q)=1$, οι μοναδικές δυνατές τιμές των p και q είναι οι ± 1. Καμία όμως από τις τιμές αυτές, δεν είναι ρίζα της (1).

Το πρόβλημα συνεπώς της τριχοτομήσεως της τυχούσης γωνίας, δεν έχει λύση.

Το πρόβλημα της τριχοτομήσεως της γωνίας, σχετίζεται βέβαια, με την κατασκευή των κανονικών πολυγώνων. Το 1796 ο Gauss, 19 ετών, κατασκεύασε το 17γωνο. Έδωσε επίσης μια ικανή συνθήκη για την κατασκευή οιουδήποτε κανονικού n-γώνου. Αργότερα, ο Wantzel (1814 – 1848), έδειξε και το ικανό της συνθήκης αυτής.

3. Τετραγωνισμός του κύκλου. Το πρόβλημα αυτό, τίθεται ως εξής: Να κατασκευασθεί τετράγωνο με εμβαδόν ίσο προς το εμβαδόν δοσμένου κύκλου. Το πρόβλημα αυτό εθεωρήθη ότι είναι δυνατόν να λυθεί, επειδή ο Ιπποκράτης είχε τετραγωνίσει τους μηνίσκους.:



Με ακτίνα $R = \frac{(\mathrm{A\Gamma})}{2}$ γράφουμε κύκλο Κ με εμβαδόν πR^2. Με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ, $(\mathrm{AB}) = R\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο Λ με εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{2}$. Άρα, το εμβαδόν του μισού κύκλου Λ είναι $\frac{\pi R^2}{4}$. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $2R^2$. Το τέταρτον του εμβαδού του κύκλου Κ μείον το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ μας δίδει το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $T = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)R^2$. Το εμβαδόν συνεπώς του μηνίσκου ΑΕΒ είναι, $(AEB)=\frac{\pi R^2}{4}-T=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{\pi R^2}{4}+\frac{R^2}{2}=\frac{R^2}{2}$, που είναι το τέταρτο του τετραγώνου ΑΒΓΔ, το οποίο είναι κατασκευάσιμο.

Επανερχόμεθα στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Θα δείξουμε το εξής Θεώρημα: Κάθε κατασκευάσιμος αριθμός, είναι ρίζα πολυωνυμικής εξισώσεως με ρητούς συντελεστές. Πρώτα όμως το Λήμμα:

Λήμμα. Έστω $F(\sqrt{k})$ μια τετραγωνική επέκταση του σώματος F. Αν ρ είναι μια ρίζα ενός πολυωνύμου n-στού βαθμού μεσυντελεστές εν $F(\sqrt{k})$, τότε, η ρ είναι και ρίζα ενός πολυωνύμου 2n βαθμού, με συντελεστές εν F.
Απόδειξη. Έστω ρ η ρίζα της εξισώσεως

$$(a_n+b_n\sqrt{k})x^n+(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{k})x^{n-1}+\ldots+(a_0+b_0\sqrt{k})=0 \qquad (1)$$

όπου $\forall i,\ a_i, b_i \in F$ και $a_n, b_n \neq 0$. Μετά από μια μικρή τακτοποίοιση, η (1) γράφεται

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0 = -\sqrt{k}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και λαβαίνουμε μια εξίσωση 2n βαθμού με συντελεστές στο F και με ρίζα ρ. Ο συντελεστής $a_n^2-kb_n^2$ του μεγιστοβάθμιου όρου x^{2n} είναι $\neq 0$ γιατί από υπόθεση $\sqrt{k}\notin F$.

Με την βοήθεια του λήμματος αυτού, θα δείξουμε το θεώρημα που αναφέραμε παραπάνω.

Απόδειξη. Αν ο αριθμός ρ είναι κατασκευάσιμος, τότε υπάρχει η ακολουθία των τετραγωνικών επεκτάσεων $F\subset\ldots\subset F_n$ όπου $F=\mathbb{Q}$ και $\rho\in F_n$. Η σχέση $\rho\in F_n$ είναι ισοδύναμη της εξισώσεως με συντελεστές εν F_n, $x-\rho=0$. Λόγω του λήμματος, ο ρ είναι ρίζα εξισώσεως βαθμού 2 με συντελεστές εν F_{n-1}. Επαγωγικά, ο ρ είναι ρίζα πολυωνυμικής εξισώσεως βαθμού 2^n με συντελεστές εν $\mathbb{Q}$.

Ο τετραγωνισμός συνεπώς του κύκλου, ισοδύναμη με την απόδειξη ότι ο π είναι ή όχι, ρίζα πολυωνυμικής εξισώσεως, με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Q}$. Με το πρόβλημα αυτό όμως, θα ασχοληθούμε σε άλλη ενότητα.

4. Κανονικό πεντάγωνο. Στον Ευκλείδη δίδεται η κατασκευή των κανονικών πολυγώνων με πλευρές n = 3, 4, 5 και 6, ως επίσης, και όσα προκύπτουν εξ αυτών, δια διχοτομήσεως του τόξου της πλευράς του κανονικού πολυγώνου. Η περίπτωση του τετραγώνου είναι άμεση. Πράγματι, αν x το μήκος της πλευράς του και $R=1$ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, είναι και $x^2=2$, συνεπώς το μήκος x κατασκευάσιμο.
Η περίπτωση του πενταγώνου, αντιμετωπίζεται ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το κανονικό πεντάγωνο με πλευρά (ΑΔ) = x. Είναι, τότε, και (ΑΕ) = (ΑΔ) = x. (Πράγματι, $\angle AE\Delta = \angle AEB + \angle BAE = 2\frac{2\pi}{5} = \angle A\Delta E$)

Υποθέτουμε ακόμα, ότι (ΑΒ) = 1.
Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια.
Άρα και $\frac{(AB)}{(\Delta\Gamma)}=\frac{(AE)}{(E\Gamma)}$ ή $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ ή $x^2+x-1=0$. Το μήκος x της πλευράς του κανονικού πενταγώνου, ισούται με

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Το μέγεθος αυτό, είναι κατασκευάσιμο.

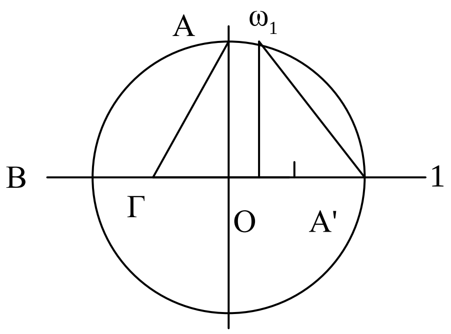
Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (x, y) των κορυφών του κανονικού πενταγώνου, το θεωρούμε αυτό εγγεγραμμένο σε έναν μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, οπότε, ουσιαστικά, ζητάμε να κατασκευάσουμε γωνία $\varphi = \dfrac{2\pi}{5}$. Οι κορυφές z του πενταγώνου είναι οι ρίζες της εξισώσεως $z^5 - 1 = 0$, ή $(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0)$. Οι ρίζες του $z^5 - 1$ δίδονται από την σχέση $\omega = \cos\dfrac{2k\pi}{5} + i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$, $0 \le k \le 4$, όπου για $k = 0$ λαβαίνουμε την πραγματική ρίζα $x = 1$. (Βλέπε και Ενότητα "ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ").

Οι τέσσερις μιγαδικές ρίζες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ είναι ανά δύο συζυγείς. Για την

$\omega_1 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ είναι,

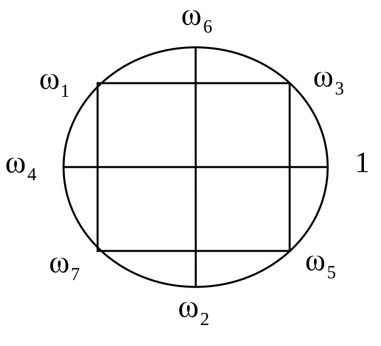
$\overline{\omega}_1 = \cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{2\pi}{5} = \cos 4\dfrac{2\pi}{5} + i\sin 4\dfrac{2\pi}{5} = \omega_4$, οπότε $\omega_1 + \omega_4 = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε και $\omega_2 + \omega_3 = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$. Παρατηρούμε ότι οι $\rho_1 = \cos\dfrac{2\pi}{5}$ και $\rho_2 = \cos\dfrac{4\pi}{5}$ είναι ρίζες του $x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0$, μια και το $\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{1}{2}$ και $\rho_1\rho_2 = -\dfrac{1}{4}$. Έχουμε εξ' άλλου ότι $\cos\dfrac{4\pi}{5} < 0 < \cos\dfrac{2\pi}{5}$ άρα και

$\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{2}$. Οδηγούμεθα, λοιπόν, στην εξής γεωμετρική κατασκευή του τόξου με $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.



Στον μοναδιαίο κύκλο κέντρου O, λαβαίνουμε τμήμα OΓ μήκους $(O\Gamma) = -\dfrac{1}{2}$. Το ορθογώνιο τρίγωνο OAΓ δίδει το μήκος $(A\Gamma) = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$. Λαβαίνουμε $(\Gamma A') = (\Gamma A)$ οπότε και $(OA') = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{5}{4}}$. Από το μέσον του τμήματος OA', υψώνουμε κάθετο, η οποία τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο σημείο ω_1.

5. Κατασκευή κανονικού πολυγώνου. Η κατασκευή του κανονικού n-γώνου ανάγεται, λοιπόν, στην κατασκευή μιας n-ρίζας της μονάδος. (Κατασκευή του πραγματικού και φανταστικού τμήματος της ρίζας).



Σύμφωνα όμως με το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε ως προς τα μεγέθη που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη, ο βαθμός του πολυωνύμου, την ρίζα του οποίου καλούμεθα να κατασκευάσουμε, θα πρέπει να είναι δύναμη του 2 (βλέπε παρακάτω). Καλλίτερα, μας αρκεί να κατασκευάσουμε μιαν ***αρχική ρίζα της μονάδας***, γιατί, η επανάληψη αυτής n φορές, θα μας δώσει όλες τις ζητούμενες κορυφές. Για το οκτάγωνο π.χ. (όπως και για το δεκαεξάγωνο, όπως θα δούμε παρακάτω), αρκεί να είναι κατασκευάσιμη η αρχική ρίζα $\omega_1 = \omega^3$, όπου $\omega = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8}$, οπότε οι υπόλοιπες κορυφές θα είναι οι

$$\omega_1 = \omega^3, \omega_2 = (\omega^3)^2, \ldots, \omega_8 = (\omega^3)^8 = \omega_0 = 1$$

τοποθετημένες πάνω στην περιφέρεια, όπως δείχνει το δίπλα σχήμα.

Λήμμα 1. Αν $(m,n)=1$, η γωνία $\frac{2\pi}{mn}$ είναι κατασκευάσιμη, αν και μόνον αν οι γωνίες $\frac{2\pi}{m}$ και $\frac{2\pi}{n}$ είναι κατασκευάσιμες.

Απόδειξη. 1) Η γωνία $\frac{2\pi}{mn}$ είναι κατασκευάσιμη. Τότε $\frac{2\pi}{m} = n\frac{2\pi}{mn}$, και $\frac{2\pi}{n} = m\frac{2\pi}{mn}$ άρα οι γωνίες αυτές είναι κατασκευάσιμες, ως πολλαπλάσια κατασκευασίμου γωνίας.

2) Οι γωνίες $\frac{2\pi}{m}$ και $\frac{2\pi}{n}$ είναι κατασκευάσιμες. Από υπόθεση έχουμε (σχέση του Bezout, βλέπε ενότητα ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ) $\lambda n + \mu m = 1$ απ' όπου και $\frac{2\pi}{mn} = \lambda\frac{2\pi}{m} + \mu\frac{2\pi}{n}$.

Λήμμα 2. Αν ο $n \geq 3$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, τότε το κανονικό n-πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο αν και μόνον αν οι γωνίες $\frac{2\pi}{p_1^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{2\pi}{p_k^{\alpha_k}}$ είναι κατασκευάσιμες.

Πρόταση. Ανάμεσα στις n ρίζες της μονάδος, υπάρχει πάντοτε μία αρχική ρίζα της μονάδος. Για παράδειγμα, αν $n = 8$, τότε η $\omega_1 = \omega^3$, όπου $\omega = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = e^{2\pi i/n}$, είναι, όπως είδαμε παραπάνω, αρχική ρίζα της μονάδος.

Απόδειξη. Αρκεί να λάβουμε $\omega_1 = e^{2\kappa\pi i/n}$, όπου κ ο μικρότερος των $\{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$ για τον οποίο ισχύει ότι $(\kappa, n) = 1$. Πράγματι, αν έτσι έχει εκλεγεί η ω_1, για $0 < k < n-1$, κάθε ρίζα της μονάδος, της μορφής $\omega_1^k = (e^{2k\pi/n})^\kappa$ είναι και διαφορετική, μια και για $k \neq m$ αν $\omega_1^k = \omega_1^m$, θα ήταν και $(e^{2k\pi/n})^\kappa = (e^{2m\pi/n})^\kappa$ ή $2\pi\kappa\left(\frac{k-m}{n}\right) = 0$. Επειδή ο κ δεν διαιρεί τον n θα πρέπει αναγκαστικά να είναι $k - m = 0$, πράγμα αδύνατον.

Πόρισμα. Αν ω είναι μία αρχική ρίζα της μονάδος, τότε και η ω^κ είναι αρχική ρίζα της μονάδος, αν και μόνον αν, $(\kappa, n) = 1$.

Πόρισμα. Το πλήθος των n-αρχικών ριζών είναι $\varphi(n)$.

Όταν λέμε ότι ο αριθμός a είναι αλγεβρικός πάνω στο σώμα F, καταλαβαίνουμε, ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο με συντελεστές εν F, του οποίου ρίζα είναι ο a. Το ***ελάχιστο πολυώνυμο*** του a, είναι το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο εν F[x], που έχει ρίζα τον a. Ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού, καλείται βαθμός του a και συμβολίζεται με το $\deg_F a$. (Βλέπε και ενότητα ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΩΜΑΤΟΣ).

Πρόταση. Έστω $f \in F[x]$ με $f(a)=0$. Τότε το f είναι ελάχιστο πολυώνυμο του a επί το F, αν και μόνον αν το $f(x)$ είναι ανάγωγο εν F.
Απόδειξη. Βλέπε Θεώρημα 1 στην ενότητα Επεκτάσεις Σώματος.

Πρόταση. Αν a αλγεβρικός αριθμός επί του F, $[F(a):F]=\deg_F a$.
Απόδειξη. Βλέπε Θεώρημα 2 στην ενότητα Επεκτάσεις Σώματος.

Πρόταση. Αν a κατασκευάσιμος αριθμός, τότε ο $\deg_F a$ είναι δύναμις του 2. Ισχύει και το αντίστροφο.
Απόδειξη. Όπως σημειώσαμε πιο πάνω, ο a είναι κατασκευάσιμος, αν είναι στοιχείο κάποιου σώματος, το οποίο είναι τετραγωνική επέκταση του σώματος των ρητών αριθμών. Αν λοιπόν $\mathbb{Q}=F_o \subset \ldots \subset F_n$ με $a \in F_n$, τότε και $[F_{j+1}:F_j]=2$.
Εξ' άλλου, $[F_n:\mathbb{Q}]=[F_n:F_{n-1}]\cdots[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]=2^n$
Αντιστρόφως. Έστω $\mathbb{Q}=F_o \subset \ldots \subset F_n$ με $[F_{j+1}:F_j]=2$. Αν $\mathcal{L}$ το σύνολο των κατασκευάσιμων μεγεθών, είναι, $F_o \subset \mathcal{L}$. Υποθέτουμε ότι $F_j \subset \mathcal{L}$. Θα δείξουμε ότι και $F_{j+1} \subset \mathcal{L}$. Πράγματι, αν $a \in F_{j+1}$, τότε και 1, a, $a^2 \in F_j$, μια και $[F_{j+1}:F_j]=2$. Υπάρχουν, λοιπόν μη μηδενικοί $\alpha, \beta, \gamma \in F_j$, έτσι ώστε $\alpha a^2+\beta a+\gamma=0$. Στην περίπτωση που $\alpha=0$, $a=-\dfrac{\gamma}{\beta} \in F_j \subset \mathcal{L}$. Στην περίπτωση που $\alpha \neq 0$, $a=\dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, και συνεπώς, $a \in \mathcal{L}$, μια και το $\mathcal{L}$ είναι σώμα σταθερό ως προς την εξαγωγή ρίζας.

Πρόταση (Wantzel 1837)**.** Αν το κανονικό n-πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο, και ο πρώτος p διαιρεί τον n, τότε ο p είναι της μορφής $2^\beta+1$, όπου $\beta=2^\kappa$. (Πρώτοι του Fermat).
Απόδειξη. Από υπόθεση, η αρχική p ρίζα της μονάδος είναι κατασκευάσιμη. Οι ρίζες του αναγώγου πολυωνύμου $\dfrac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1$ είναι συνεπώς κατασκευάσιμες και άρα, ο $p-1=2^\beta$. Όμως, ο p είναι πρώτος, ανν $\beta=2^\kappa$. Πράγματι, αν $\beta=1$, μπορούμε να λάβουμε $\kappa=0$. Αν $\beta>1$ ο β είναι τουλάχιστον πολλαπλάσιο του 2, και, άρα, $\beta=qr$, και συνεπώς, $2^\beta+1=[(2^r)^q+1]=[2^r+1][(2^r)^{q-1}-(2^r)^{q-2}+(2^r)^{q-3}\ldots-2^r+1]$ που, όμως, δεν είναι αριθμός p πρώτος.

Βιβλιογραφία. Πάνω στα προβλήματα αυτά, «Τα μεγάλα Μαθηματικά Προβλήματα των Αρχαίων Ελλήνων», έχει εκδώσει μελέτη ο τ. καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών Μαυρίκιος Μπρίκας. (Υπάρχει στην βιβλιοθήκη του Τμήματος Μαθηματικών). Από την διεθνή βιβλιογραφία, θα αναφέρουμε μόνον το Théorie des Corps. La règle et le compas, όπου εκεί υπάρχει και εκτενής ιστορική επισκόπηση του θέματος.