

ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΤΥΡΒΗ ΣΕ ΡΟΕΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ

Πέτρος Ι. Ιωάννου*, Μάριος-Ανδρέας Νικολαΐδης και Ναβίτ Κ. Κωνσταντίνου

Τμήμα Φυσικής, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

* e-mail: pjiannou@phys.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

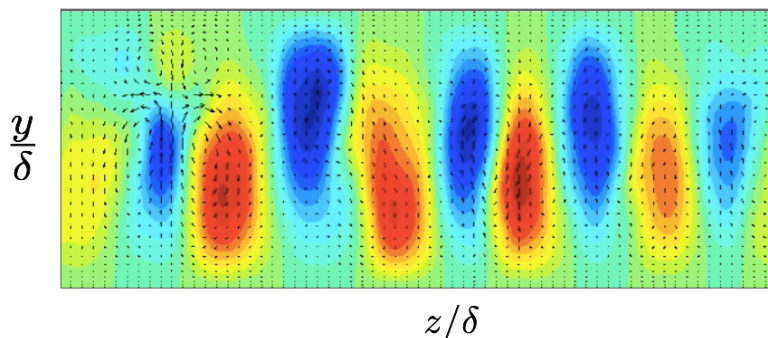
Παρουσιάζουμε αριθμητικές προσομοιώσεις στις οποίες συντηρείται τυρβώδης κατάσταση στα $Re_\tau = 970$ με μία μόνο μη μηδενική αρμονική στη διεύθυνση της ροής και χωρίς καμία άλλη παρέμβαση στις εξισώσεις Navier-Stokes. Η τυρβώδης κατάσταση λειτουργεί με τον αναγεννητικό κύκλο (self-sustaining process – SSP) που συντηρεί την τυρβώδη κατάσταση σε διατμητικές τυρβώδεις ροές. Η εύρεση της απλοποιημένης αυτής τυρβώδους κατάστασης μπορεί να οδηγήσει στη κατανόηση του αναγεννητικού κύκλου SSP και στην εξεύρεση μεθόδων ελέγχου της τυρβώδους ροής πέραν της γραμμικής θεωρίας.

Λέξεις κλειδιά: τυρβώδης ροή, συνεκτικές δομές, στατιστική δυναμική, έλεγχος τυρβώδους κατάστασης

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η τύρβη σε διατμητικές ροές συντηρείται από την ενέργεια που προέρχεται από την κλίση της μέσης ταχύτητας της ροής. Όταν η μέση ροή έχει σημεία καμπής τότε η τύρβη τροφοδοτείται μέσω των μεγάλης κλίμακας υδροδυναμικών ασταθειών. Οι περισσότερες όμως μέσες ροές σε αγωγούς δεν έχουν σημεία καμπής και ο τρόπος τροφοδότησης της τύρβης είναι περισσότερο δαιδαλώδης. Υπάρχει πλέον γενική συμφωνία ότι η τύρβη συντηρείται σε αυτές τις ροές μέσω ενός αναγεννητικού κύκλου (self-sustaining process – SSP) μέσω του οποίου μεταφέρεται ενέργεια από τη μέση ροή στην τύρβη. Ο κύκλος αυτός, που προτάθηκε από τους [Hamilton et al. \(1995\)](#), [Waleffe \(1997\)](#), εκμεταλλεύεται και τις τρεις διαστάσεις της ροής μέσω μεγάλης κλίμακας συνεκτικών δομών¹ που χαρακτηρίζουν καθολικά όλες τις τυρβώδεις διατμητικές ροές και οι οποίες διαμορφώνουν μέση ροή με σημεία καμπής στη διεύθυνση κατά το πλάτος του αγωγού. Οι δομές αυτές κοντά στα τοιχώματα (near-wall region) αποτελούνται κυρίως από μία σειρά κυλινδρικών στροβίλων (rolls) με άξονες στη διεύθυνση της ροής και με σχεδόν δισδιάστατο πεδίο ταχυτήτων, και εκεί που η ταχύτητα των στροβίλων απομακρύνεται από τα τοιχώματα, εμφανίζεται μείωση της ταχύτητας στη διεύθυνση της μέσης ροής (low speed streak), ενώ όπου η ταχύτητα των στροβίλων είναι προς τα τοιχώματα εμφανίζεται προσαύξηση (high speed streak) (βλ. Σχ. 1). Οι μεγάλες αυτές συνεκτικές δομές συνοδεύονται από μικρότερες διαταραχές διατεταγμένες σε σχήμα V που αναφέρονται γενικά ως κεκλιμένες διαταραχές (oblique perturbations). Οι κυρίαρχες δομές αυτές παρατηρήθηκαν πρώτα σε πειράματα με χρήση φυσαλίδων υδρογόνου ([Kline et al. 1967](#)) και αργότερα σε άμεσες αριθμητικές προσομοιώσεις (direct numerical simulations – DNS) της τυρβώδους κατάστασης σε σωλήνες (π.χ. [Kim et al. \(1987\)](#)). Τελευταίες προσομοιώσεις παρουσιάζουν ανάγλυφη αποτύπωση και των δύο τύπων συνεκτικών δομών (βλ. [Wu and Moin \(2009\)](#)). Επιπλέον, έγινε αντιληπτό σε τυρβώδεις ροές σε πολύ υψηλούς

¹Με τον όρο συνεκτικές δομές εννοούμε οργανωμένες κινήσεις που έχουν χρονική και χωρική συνοχή και εμπεριέχουν σημαντικό ποσοστό της ενέργειας της ροής.



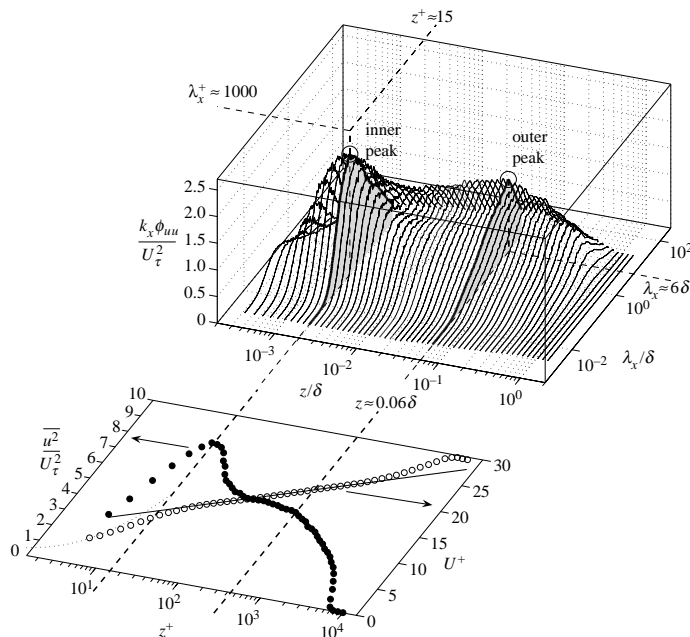
Σχήμα 1: Οι ισουψείς της $U_s = U - [U]$, όπου U η στιγμιαία μέση, ως προς x , x ταχύτητα και $[U]$ το μέσο προφίλ της ταχύτητας ($[U]$ συμβολίζει την μέση τιμή ως προς z) και το πεδίο ταχυτήτων (V, W) στο επίπεδο (y, z) από προσομοίωση τυρβώδους ροής Couette με $Re = 1000$, βασισμένου στην ημιαπόσταση δ μεταξύ των τοιχωμάτων. Διακρίνονται οι μεγάλες συνεκτικές δομές: με τα βέλη οι στρόβιλοι (rolls) και με το χρώμα οι προσανυξήσεις της x ταχύτητας (streaks). Δεδομένου ότι η μέση ροή αυξάνεται με το y , όπου $V > 0$ θα προκληθεί μείωση του U_s , και αντίστοιχα όπου $V < 0$ αύξηση. Στο σχήμα φαίνεται ότι οι προσανυξήσεις ενισχύονται από τους στρόβιλους. Επειδή όμως οι προσανυξήσεις και οι μεταβολές τους δεν συμπίπτουν ακριβώς προκαλείται η συνεχής μετατόπιση των προσανυξήσεων στην τυρβώδη κατάσταση.

αριθμούς Reynolds ότι υπάρχουν και αντίστοιχες συνεκτικές δομές στο λογαριθμικό στρώμα που είναι ιδιαίτερα επιμήκεις που ονομάστηκαν “υπερδομές” ή VLSM (βλ. [Toh and Itano \(2005\)](#), [Marusic et al. \(2010\)](#)). Στο Σχ. 2 παρουσιάζεται το ενεργειακό φάσμα των διαταραχών² από πρόσφατες εργαστηριακές παρατηρήσεις των [Hutchins and Marusic \(2007b\)](#) σε υψηλούς αριθμούς Re .

Η προέλευση και η διατήρηση αυτών των συνεκτικών δομών στα εσωτερικά και εξωτερικά στρώματα της ροής είναι κεντρικό και θεμελιώδες ερώτημα στο οποίο υπάρχουν δύο σχολές σκέψης. Ο πρώτος τρόπος σκέψης επιχειρεί να εξηγήσει με κατ’ ουσίαν γραμμικές διεργασίες τις συνεκτικές αυτές δομές. Οι δομές θεωρούνται ότι σχηματίζονται από αστάθειες της μέσης ροής ή από μεταβατική αύξηση της ενέργειας των διαταραχών που προκαλείται κατά την αλληλεπίδραση με τη μέση τυρβώδη ροή (βλ. π.χ. [Schoppa and Hussain \(2002\)](#)). Υπό αυτή την άποψη οι συνεκτικές δομές οργανώνονται μέσω της παθητικής απόκρισης της γραμμικής δυναμικής στο άτακτο διαταρακτικό πεδίο που χαρακτηρίζει τη τυρβώδη κατάσταση χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ανάδραση της μέσης ροής στη διαμόρφωση του πεδίου αυτού. Το γεγονός όμως ότι μια τέτοια θεώρηση μπορεί να αναπαράγει το διαταρακτικό ενεργειακό φάσμα του Σχ. 2 αναδεικνύει το καθοριστικό ρόλο της μέσης ροής στην οργάνωση της τύρβης ([del Álamo and Jiménez 2006](#), [Farrell and Ioannou 1998](#)). Ο δεύτερος τρόπος σκέψης θεωρεί ότι οι δομές αυτές προέρχονται από καθαρά μη-γραμμικές διεργασίες π.χ. από την άμεση μη-γραμμική αλληλεπίδραση κεκλιμένων διαταραχών (βλ. [Benney \(1960\)](#)), είτε τη διάσπαση και επανένωση στρόβιλων ([Adrian 2007](#)).

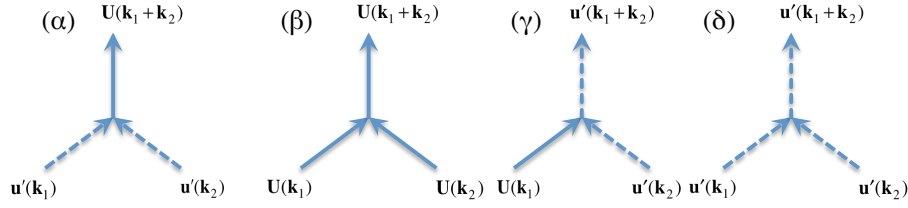
Προσφάτως προτάθηκε ένας νέος μηχανισμός για τον σχηματισμό των συνεκτικών δομών από τους [Farrell and Ioannou \(2012\)](#) που συνδυάζει τους δύο τρόπους σκέψης και στον οποίο και εδράζεται και η εργασία που θα παρουσιάσουμε. Ας θεωρήσουμε αγωγούς με τοιχώματα παράλληλα στο επίπεδο (x, z) και έστω ότι αρχικά η μέση ροή, $U(y)\hat{x}$, με διεύθυνση τον άξονα x , είναι ομογενής στη z διεύθυνση, κατά το πλάτος του αγωγού, και εξαρτάται μόνο από τη κάθετη στα τοιχώματα διεύθυνση, y . Αν αυτή η ροή συνοδεύεται με τύρβη τότε η τύρβη πρέπει να είναι και αυτή στατιστικά ομογενής στη διεύθυνση z και η ομογενής αυτή κατάσταση στη διεύθυνση z αποτελεί σημείο ισορροπίας της στατιστικής δυναμικής της ροής, δηλαδή σημείο ισορροπίας των στατιστικών ροπών της ροής. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτή η z ομογενής κατάσταση ισορροπίας καθίσταται στατιστικά ασταθής για αρκούντως μεγάλο αριθμό Re

²Ποσότητες εξεφρασμένες σε εξωτερικές μονάδες αδιαστατικοποιούνται με μονάδα μήκους την ημιαπόσταση h (ή δ) μεταξύ των τοιχωμάτων και μονάδα χρόνου το h/u_τ και ο αριθμός Reynolds σε αυτές τις μονάδες είναι $Re_\tau = u_\tau h/\nu$ όπου $u_\tau = \sqrt{\nu dU/dy|_w}$ είναι η ταχύτητα αντίστασης (friction velocity) και $dU/dy|_w$ είναι η κλίση της μέσης ροής στα τοιχώματα. Ποσότητες σε εσωτερικές μονάδες συμβολίζονται με $^+$, και σε αυτή τη περίπτωση οι ταχύτητες έχουν αδιαστατικοποιηθεί με την u_τ και τα μήκη έχουν αδιαστατικοποιηθεί με ν/u_τ .



Σχήμα 2: Οι εσωτερικές και εξωτερικές κορυφές στο ενεργειακό φάσμα $\overline{u^2}$ των διαταραχών του πεδίου ταχύτητας κατά τη διεύθυνση της ροής, x , σε οριακό στρώμα με $Re_\tau = 7300$ από παρατηρήσεις των Hutchins and Marusic (2007b) αντιστοιχούν με τις επιμήκειες συνεκτικές δομές του αναγεννητικού κύκλου (SSP) στην εσωτερική περιοχή αλλά και με τις “υπερδομές” ή VLSM στο εξωτερικό της ροής στο λογαριθμικό στρώμα. Στη κάτω γραφική παράσταση σχεδιάζεται η αντιστοιχούσα μέση ροή (ανοικτοί κύκλοι) καθώς και η μεταβολή του $\overline{u^2}$ συναρτήσει της απόστασης από τα τοιχώματα y^+ . Εδώ με k_1 συμβολίζουν οι συγγραφείς τον x κυματαριθμό και με λ_1 το μήκος κύματος.

και η ομογένεια στη z διεύθυνση καταστρέφεται με την εμφάνιση συνεκτικών δομών με x κυματαριθμό $k_x = 0$. Οι συνεκτικές δομές αυτές αποτελούνται από στρόβιλους συνοδευόμενους με προσαυξήσεις στην x μέση ταχύτητα, όπως στο Σχ. 2. Η αστάθεια αυτή βασίζεται στην εξής καταπληκτική ιδιότητα που έχει καθολική ισχύ: αν η μέση ροή διαταραχθεί κατ’ελάχιστον και με οποιονδήποτε τρόπο στον άξονα z με προσαύξηση και μείωση ταχύτητας U , τότε η παραμόρφωση αυτή της ροής διαταράσσει τη στατιστική ομογένεια της τύρβης με τέτοιο τρόπο ώστε η τύρβη να δημιουργεί τους κατάλληλους στρόβιλους οι οποίοι και ενισχύουν την αρχική παραμόρφωση. Αυτή η ανάδραση μεταξύ τύρβης και μέσης ροής οδηγεί στο σχηματισμό των συνεκτικών δομών αλλά και επιτρέπει την αέναη συνύπαρξη στροβίλων (rolls) και προσαυξήσεων του πεδίου ταχυτήτων (streaks) όταν η ροή είναι τυρβώδης. Η ανάδραση αυτή αποτελεί δηλαδή τη δυναμική βάση του αναγεννητικού κύκλου SSP. Σε αυτή τη θεώρηση η μόνη δυναμική διαδικασία είναι η μη-γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ των στροβίλων, των προσαυξήσεων των μέσων ταχυτήτων (δύο πεδία με μηδενικό κυματαριθμό, $k_x = 0$, στη διεύθυνση της ροής x) και των διαταραχών (το πεδίο ταχυτήτων με $k_x \neq 0$). Ο SSP συντελείται λόγω της ασταθούς ανάδρασης που περιγράψαμε προηγουμένως. Επειδή η αστάθεια είναι στατιστική, εκδηλώνεται μόνο αν εξετάσουμε τη στατιστική δυναμική της ροής, δηλαδή το άπειρο σύστημα όλων των στατιστικών ροπών της ροής (βλ. Hopf (1952) και Frisch (1995)). Δεδομένου όμως ότι αφορά μόνο στην αλληλεπίδραση μεταξύ της μέσης ροής και των διαταραχών, η εκδήλωση αυτής της θεμελιώδους αστάθειας επιτυγχάνεται με τον περιορισμό του συστήματος των στατιστικών ροπών στο σύστημα που ορίζεται από τις πρώτες δύο στατιστικές ροπές και αγνοώντας τις άλλες. Αυτή η προσέγγιση της στατιστικής δυναμικής φέρει το όνομα S3T (Stochastic structural stability theory) ή CE2 (second order cumulant expansion) (βλ. Farrell and Ioannou (2003), Marston et al. (2008)) και αποδεικνύεται ότι προκύπτει αν θεωρήσουμε τη στατιστική δυναμική των εξισώσεων Navier-Stokes (NS) κρατώντας στη διεύθυνση της ροής μόνο τις μη-γραμμικές αλληλεπιδράσεις α μεταξύ διαταραχών με αντίθετους κυματαριθμούς στη διεύθυνση της ροής (δηλαδή το k_{x1} αλληλεπιδρά με το k_{x2} μόνο αν $k_{x2} = -k_{x1}$, οπότε η αλληλεπίδραση οδηγεί στο σχηματισμό



Σχήμα 3: Σχεδιάγραμμα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ κυματαριθμών της μέσης ροής $\mathbf{U}(\mathbf{k})$ με κυματαριθμό $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ με $k_x = 0$ και των διαταραχών $\mathbf{u}'(\mathbf{k})$ με $k_x \neq 0$. Στις εξισώσεις για τη μέση ροή (1α') περιλαμβάνονται αλληλεπιδράσεις (α) με τις οποίες οι διαταραχές με κυματαριθμούς $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_{y1}, k_{z1})$ και $\mathbf{k}_2 = (-k_x, k_{y2}, k_{z2})$ επιδρούν στη μέση ροή και (β) με τις οποίες μέσα πεδία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η αλληλεπίδραση (β) προκαλεί τις προσαναζήσεις στη μέση ταχύτητα (streaks) ενώ μέσω των (α) σχηματίζονται οι μέσοι στροβίλοι (rolls). Και οι δύο αλληλεπιδράσεις περιλαμβάνονται στην αντίστοιχη εξίσωση RNL (2α'). Στις εξισώσεις για τις διαταραχές (1β') περιλαμβάνονται οι αλληλεπιδράσεις (γ) μεταξύ μέσης ροής και διαταραχών και οι αλληλεπιδράσεις (δ) μεταξύ διαταραχών με $k_{x1} \neq -k_{x2}$. Οι (γ) ευθύνονται για την αστάθεια ή τη μεταβατική αύξηση των διαταραχών και συμπεριλαμβάνονται στην αντίστοιχη εξίσωση RNL (2β'), ενώ οι αλληλεπιδράσεις (δ) δεν συμπεριλαμβάνονται. Ο αποκλεισμός των αλληλεπιδράσεων (δ) επιτρέπει στη στατιστική δυναμική των RNL εξισώσεων να προσδιορίζεται πλήρως από τις δύο πρώτες ροές.

μέσης ροής με $k_x = 0$) και β) μεταξύ διαταραχών $k_x \neq 0$ και της μέσης ροής $k_x = 0$. Όλες οι αλληλεπιδράσεις των κυματαριθμών στις άλλες διευθύνσεις περιλαμβάνονται πλήρως. Αυτή η RNL (Restricted Nonlinearity) προσέγγιση των NS παράγει εξισώσεις με τις ίδιες διατηρήσιμες ποσότητες όπως και η NS και έχει το πλεονέκτημα ότι η στατιστική δυναμική του RNL συστήματος κλείνει και αντιστοιχεί στο κλείσιμο δεύτερης τάξης της στατιστικής δυναμικής των εξισώσεων NS (Marston et al. 2008). Η RNL προσέγγιση των NS παράγει τυρβώδη κατάσταση παρόμοια με αυτήν της DNS σε ροές Couette (Thomas et al. 2014) και σε ροές Poiseuille (Constantinou et al. 2014). Θα παρουσιάσουμε μερικά χαρακτηριστικά της RNL δυναμικής και θα δείξουμε ότι η RNL ασυμπτωτικά καταλήγει να συντηρεί μια απλοποιημένη τυρβώδη κατάσταση η οποία αποκαλύπτει τα ελάχιστα συστατικά δυναμικά στοιχεία που απαιτούνται για τη συντήρηση τυρβώδους κατάστασης με τα ίδια μακροσκοπικά χαρακτηριστικά με αυτά των DNS.

2. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ RNL ΚΑΙ Η ΑΠΟΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

Θεωρήστε μία επίπεδη ροή Poiseuille υπό πίεση Gx , όπου x η διεύθυνση της ροής. Η κάθετη στη τοιχώματα διεύθυνση είναι y και η κατά πλάτος διεύθυνση z . Το μήκος του αγωγού στην x , y και z διεύθυνση είναι αντίστοιχα L_x , $2h$ και L_z . Τα τοιχώματα είναι στα $y/h = 0$ και 2 . Μέσες τιμές ως προς τη διεύθυνση της ροής x συμβολίζονται με $\overline{\bullet} = L_x^{-1} \int_0^{L_x} \bullet dx$, και μέσες τιμές ως προς την κατά πλάτος διεύθυνση z με $[\bullet] = L_z^{-1} \int_0^{L_z} \bullet dz$. Η ταχύτητα, \mathbf{u} , αναλύεται στη μέση τιμή της κατά τη διεύθυνση της ροής, $\mathbf{U}(y, z, t)$, και την απόκλιση από τη μέση τιμή (διαταραχή), $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$, οπότε η ταχύτητα της ροής είναι: $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$. Οι x, y, z συνιστώσες της \mathbf{U} είναι (U, V, W) και οι συνιστώσες της \mathbf{u}' είναι (u', v', w') . Η βαθμίδα της πίεσης ομοίως εκφράζεται ως: $\nabla p = \nabla(-Gx + P(y, z, t) + p'(x, y, z, t))$. Οι εξισώσεις NS με αυτή την ανάλυση ισοδυναμούν με το σύστημα εξισώσεων:

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - G\hat{\mathbf{x}} + \nabla P - \nu \Delta \mathbf{U} = -\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}, \quad (1\alpha')$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla p' - \nu \Delta \mathbf{u}' = -(\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' - \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}), \quad (1\beta')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (1\gamma')$$

με ν τον συντελεστή κινηματικού ιξώδους. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ της μέσης ροής και των διαταραχών που περιλαμβάνονται στο παραπάνω σύστημα περιγράφονται στο Σχ. 3. Η προσέγγιση RNL προκύπτει με τον αποκλεισμό των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των διαταραχών στην εξίσωση των διατα-

ραχών ($1\beta'$) (βλ. Σχ. 3). Το σύστημα RNL είναι συνεπώς:

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - G \hat{\mathbf{x}} + \nabla P - \nu \Delta \mathbf{U} = -\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}, \quad (2\alpha')$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{p}' - \nu \Delta \mathbf{u}' = 0, \quad (2\beta')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (2\gamma')$$

Οι RNL εξισώσεις έχουν τις ίδιες διατηρήσιμες ποσότητες και παράγει ροή που έχει πεπερασμένη ολική ενέργεια όπως και οι NS. Το πεπερασμένο της ενέργειας των διαταραχών στη προσέγγιση RNL έχει μία σημαντική επίπτωση. Έστω ότι έχει προσδιορισθεί η εξέλιξη του συστήματος RNL και είναι γνωστή η χρονική εξέλιξη των δύο πεδίων $\mathbf{U}(y, z, t)$ και $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$, τα οποία είναι πεπερασμένα. Τότε για το συγκεκριμένο $\mathbf{U}(y, z, t)$ το πεδίο $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$ θα μπορούσε να προσδιορισθεί επιλύοντας την $(2\beta')$, η οποία υπό αυτή την έννοια είναι μία γραμμική εξίσωση που συμβολικά θα μπορούσε να γραφεί ως:

$$\partial_t \mathbf{u}' = \mathbf{A}(\mathbf{U}) \mathbf{u}', \quad (3)$$

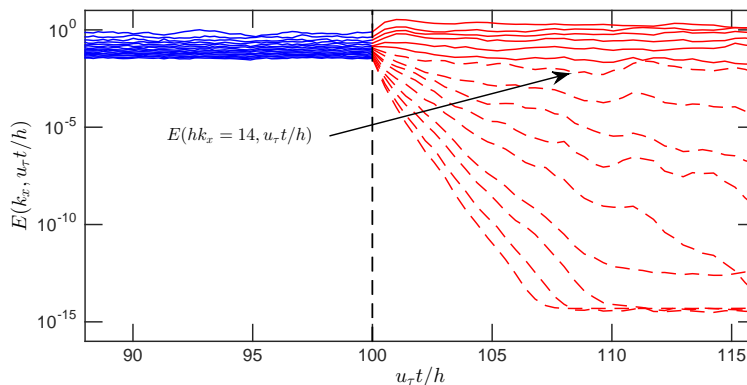
όπου $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ ένας γραμμικός χρονοεξαρτώμενος τελεστής με χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov ακριβώς ίσο με το μηδέν και με το \mathbf{u}' αναγκαστικά να περιορίζεται³ στον υποχώρο που παράγεται από τον $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ που αντιστοιχεί στο μέγιστο αυτό μηδενικό αριθμό Lyapunov (βλ. Farrell and Ioannou (2012)). Αυτή η ιδιότητα της δυναμικής RNL οδηγεί σε απόσταση του διαταρακτικού πεδίου της τυρβώδους ροής, αποκλιμακώνοντας τις διαταραχές και υποστηρίζοντας μόνο τις δομές του υποχώρου του τελεστή $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ που αντιστοιχεί στο μηδενικό αριθμό Lyapunov. Αυτή η φυσική απόσταση και αποκλιμάκωση αποκαλύπτει τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας που ευθύνονται για τη διατήρηση της τύρβης.

Πίνακας 1: Παράμετροι των προσομοιώσεων: το μήκος και πλάτος του αγωγού $[L_x, L_z]/h$, ο αριθμός των αρμονικών Fourier N_x, N_z που έχουν κρατηθεί στη προσομοίωση και N_y ο αριθμός των πολυωνύμων Chebyshev. Re_τ είναι ο αριθμός Reynolds της προσομοίωσης που είναι βασισμένο στη ταχύτητα αντίστασης και $[L_x^+, L_z^+]$ είναι το μέγεθος του αγωγού εξεφρασμένο σε εσωτερικές μονάδες.

Σύντμηση	$[L_x, L_z]/h$	$N_x \times N_z \times N_y$	Re_τ	$[L_x^+, L_z^+]$
NS950	$[\pi, \pi/2]$	$256 \times 255 \times 385$	939.9	[2953, 1476]
RNL950	$[\pi, \pi/2]$	$256 \times 255 \times 385$	882.4	[2772, 1386]
RNL950 k_x 12	$[\pi, \pi/2]$	$3 \times 255 \times 385$	970.2	[3048, 1524]

Θα παρουσιάσουμε εδώ τα αποτελέσματα από μερικά πειράματα που έγιναν πρόσφατα στο Πολυτεχνείο της Μαδρίτης με τους DNS κώδικες του Javier Jimenez (Constantinou et al. 2014). Τα πειράματα αυτά έγιναν σε σχετικά υψηλούς αριθμούς Reynolds ($Re_\tau = 950$) και είχαν ως σκοπό να συγκριθεί η τύρβη που αναπτύσσεται σε DNS με αυτήν σε RNL. Οι διαστάσεις του αγωγού και οι παράμετροι των πειραμάτων που θα παρουσιάσουμε συνοψίζονται στον Πίν. 1. Στα πειράματα επιβάλλονται περιοδικές συνθήκες στις διευθύνσεις x και z . Η προσομοίωση DNS ακολουθείται από προσομοίωση RNL με τον αποκλεισμό των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των διαταραχών κάποια χρονική στιγμή. Μία τέτοια εξέλιξη που δείχνει την αποκλιμάκωση της τυρβώδους ροής παρουσιάζεται στο Σχ. 4. Σύγκριση του ενεργειακού φάσματος του DNS με RNL στα $y^+ = 20$ δείχνει ότι και το RNL συντηρεί συνεκτικές δομές οι οποίες όμως έχουν ευθυγραμμισθεί (βλ. Σχ. 5). Δηλαδή, ενώ στο DNS το μέγιστο της φασματικής ενέργειας εμφανίζεται σε επιμήκεις συνεκτικές δομές με χαρακτηριστικό μήκος $\lambda_x^+ = 1000$ στην δυναμική RNL το αντίστοιχο χαρακτηριστικό μήκος είναι $\lambda_x^+ = L_x^+$, όσο και το μήκος του περιοδικού καναλιού. Νεώτερες προσομοιώσεις μάλιστα έχουν δείξει ότι η ευθυγράμμιση αυτή των διαταραχών που αντιστοιχεί σε μεταφορά του μέγιστου της ενέργειας στη κλίμακα του μήκους του αγωγού συμβαίνει ακόμα και για αγωγούς οι

³Αν ο $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ είναι χρονοανεξάρτητος το \mathbf{u}' ασυμπτωτικά συγκλίνει στην ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ με το μέγιστο πραγματικό μέρος. Η αντίστοιχη πρόταση για χρονοεξαρτώμενους τελεστές είναι αυτή του κειμένου.



Σχήμα 4: DNS μέχρι το χρόνο $u_\tau t/h = 100$ ακολουθείται από RNL. Σχεδιάζουμε την ενέργεια των πρώτων 15 αρμονικών Fourier ($hk_x = 2, 4, \dots, 30$) των διαταραχών ($k_x \neq 0$). Η ενέργεια μειώνεται μονότονα με τον κυματαριθμό k_x . Η RNL δυναμική διατηρεί την τυρβώδη κατάσταση μόνο με διαταρακτικό πεδίο που έχει ενέργεια στις πρώτες 6 x -αρμονικές με $hk_x = 2, 4, 5, 8, 10, 12$ ενώ όλες οι άλλες αρμονικές με $hk_x \geq 14$ μηδενίζονται (διάστιχτες γραμμές). Οι παράμετροι των προσομοιώσεων είναι στον Πίνακα 1.

οποίοι είναι δύο τάξεις μεγέθους πιο επιμήκεις από αυτόν του Πιν. 1. Τα αποτελέσματα αυτά μας οδηγούν στο να διατυπώσουμε την εικασία ότι το μέγιστο του φάσματος θα μεταφερθεί στο άπειρο για αγωγούς απείρου μήκους και αριθμούς Reynolds που τείνουν στο άπειρο. Μία τέτοια υπόθεση είναι τουλάχιστον συμβατή με τις παρατηρήσεις των Hutchins and Marusic (2007a) στο ουδέτερης σταθερότητας οριακό στρώμα στα Salt-flats της ερήμου της Nevada σε αριθμούς $Re_\tau = 660000$, στις οποίες η ενέργεια ήταν επικεντρωμένη σε συνεκτικές δομές στις μεγαλύτερες διαστάσεις που μπορούσε να διακρίνει το πείραμα.

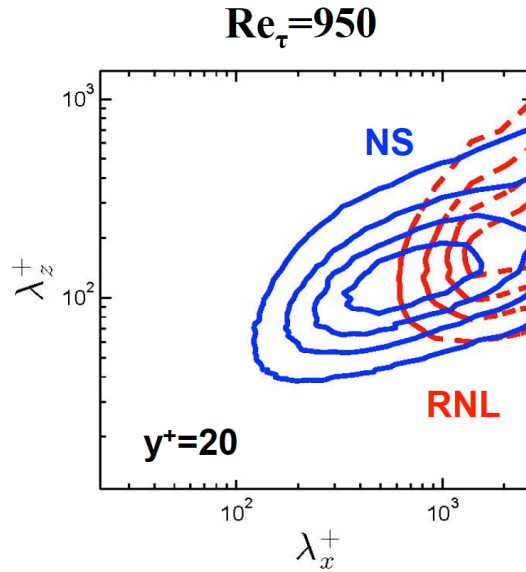
3. ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΕ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΤΥΡΒΗ

Είδαμε ότι με τη προσέγγιση RNL η τυρβώδης κατάσταση αποκλιμακώνεται και συντηρείται από την αλληλεπίδραση ενός διαταρακτικού πεδίου που αποτελείται από ένα μικρό αριθμό x αρμονικών με $k_x \neq 0$ και της μέσης ροής με $k_x = 0$. Τίθεται το ερώτημα: Πόσο μπορούμε να αποκλιμακώσουμε το διαταρακτικό πεδίο; Μπορούμε π.χ. να συντηρήσουμε την τυρβώδη κατάσταση με την αλληλεπίδραση μόνο μίας x αρμονικής με $k_x \neq 0$ με τη μέση ροή; Προς τούτο στο πλαίσιο της δυναμικής RNL επιτρέψαμε μόνο μία αρμονική στο διαταρακτικό πεδίο και δείξαμε ότι η τυρβώδης κατάσταση συντηρείται με την αλληλεπίδραση των διαταραχών με $k_x h = 12$ και της μέσης ροής $k_x = 0$. Η σύγκριση της μέσης ταχύτητας της τυρβώδους κατάστασης σε αυτό το RNL και με το αντίστοιχο DNS, καθώς και της μέσης τετραγωνικής ρίζας των διακυμάνσεων της ταχύτητας της ροής στο Σχ. 6 δείχνει ότι η απλοποιημένη τυρβώδης κατάσταση έχει ρεαλιστική δομή. Παρά την εξαιρετική απλοποίηση η τύρβη αναπτύσσει λογαριθμικό στρώμα, με διαφορετική όμως σταθερά Karman, και εμφανίζει συνεκτικές δομές που κυριαρχούν στη δυναμική.

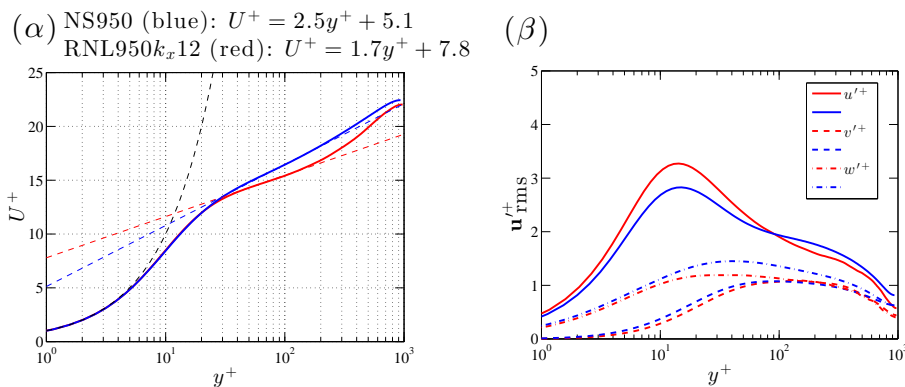
Η γεωμετρία της τύρβης σε αυτή την περίπτωση αποτελείται από δομές απείρου μήκους με το πεδίο μέσης ταχύτητας στη διεύθυνση της μέσης ροής $U(y, z, t)$ όπως αυτό του Σχ. 7(α) στο οποίο διακρίνονται οι προσανξήσεις του πεδίου ταχυτήτων και η μέση ροή περιλαμβάνει ένα πυκνό πλέγμα απείρων κυλινδρικών στροβίλων με στροβιλότητα στη διεύθυνση της ροής, όπως διαφαίνεται στο Σχ. 7(γ). Η ταχύτητα u' των διαταραχών που αντιστοιχούν στον κυματαριθμό $hk_x = 12$ σχεδιάζεται στο Σχ. 7(β). Το διαταρακτικό αυτό πεδίο ταχυτήτων σχηματίζει του άπειρους στρόβιλους του Σχ. 7(γ).

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

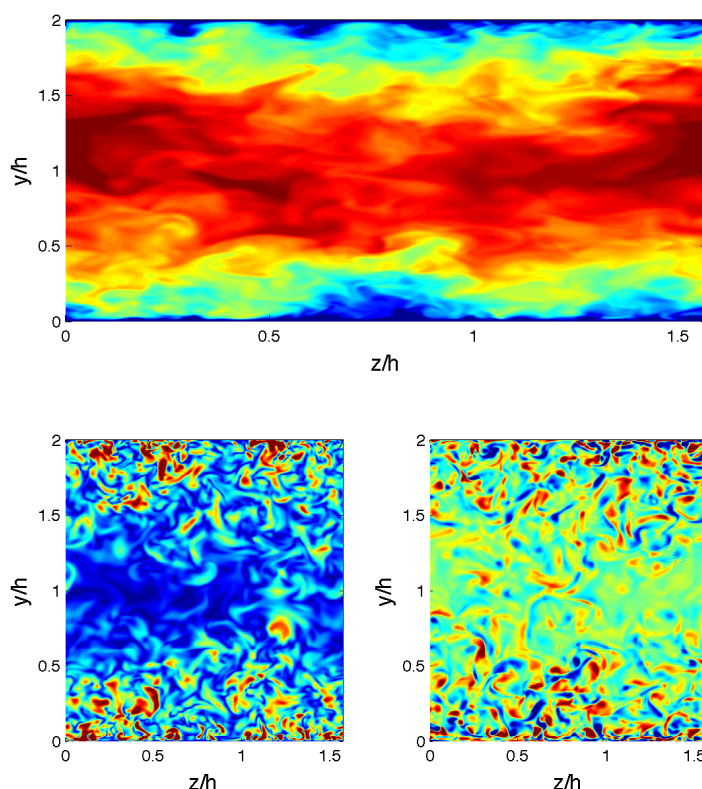
Ανάλυση της στατιστικής δυναμικής της τυρβώδους ροής σε παράλληλους αγωγούς αποκάλυψε μία θεμελιώδη στατιστική αστάθεια η οποία καταστρέφει την τυχόν ομογένεια της τύρβης στην κατά πλάτος διεύ-



Σχήμα 5: Ισοϋψείς του προπολλαπλασιασμένου φάσματος της ενέργειας $k_x k_z E_{uu}(k_x, k_z)$ της ροής στη διεύθυνση x σε απόσταση $y^+ = 20$ από τον τοίχο του καναλιού, ως συνάρτηση των μήκων κύματος λ_x^+ και λ_z^+ για τις προσομοιώσεις NS950 (συνεχείς γραμμές) and RNL950 (διάστιχτες γραμμές). Οι ισοϋψείς αντιστοιχούν σε (0.2,0.4,0.6,0.8) επί της μέγιστης τιμής του προπολλαπλασιασμένου φάσματος της ενέργειας. Οι μέγιστες τιμές των λ_x^+ και λ_y^+ είναι οι διαστάσεις του περιοδικού καναλιού, L_x^+ και L_z^+ .



Σχήμα 6: Σύγκριση των ταχυτήτων σε πλήρες DNS (NS950 στον Πιν. 1) με $Re_\tau = 940$ (χρώμα μπλε) με το αντίστοιχο RNL (χρώμα κόκκινο) με $Re_\tau = 970$ στο οποίο μόνο οι αρμονικές $k_x = 0$ και $hk_x = 12$ είναι μη-μηδενικές (RNL950 $k_x 12$ στον Πιν. 1). (α) Η μέση ροή (μέση τιμή ως προς τη x και z διεύθυνση καθώς και ως προς το χρόνο) σε εσωτερικές μονάδες. (β) Η μέση τετραγωνική ρίζα των διακυμάνσεων του πεδίου ταχυτήτων των διαταραχών, \mathbf{u}' .



Σχήμα 7: Η τυρβώδης κατάσταση στην προσομοίωση RNL950 k_x 12. (α) Στιγμιότυπο της μέσης ροής U ($k_x = 0$) στο επίπεδο y - z . (β) Οι διακυμάνσεις της ταχύτητας κατά της διεύθυνση x της αρμονικής $h k_x = 12$, $(\overline{u'^2})^{1/2}$. (γ) Η συνιστώσα της στροβιλότητα κατά τη διεύθυνση x που αντιστοιχεί στην στιγμιαία μέση ροή, $k_x = 0$ (μέση τιμή της στροβιλότητας ως προς τη x διεύθυνση, $\overline{\omega_x} = \partial_y W - \partial_z V$).

θυνηση της ροής δημιουργώντας απείρου μήκους συνεκτικές δομές. Οι δομές αυτές κοντά στα τοιχώματα αποτελούνται από κυλινδρικούς στρόβιλους (rolls) με άξονες στη διεύθυνση της ροής με αντίστοιχες προσανξήσεις στη μέση ταχύτητα στην ίδια διεύθυνση (streaks). Ο ασταθής αυτός μηχανισμός αποτελεί τη βάση του αναγεννητικού κύκλου κοντά στα τοιχώματα που συντηρεί την τυρβώδη ροή (self-sustaining process – SSP). Επειδή η στατιστική αυτή αστάθεια βασίζεται στην αλληλεπίδραση των πεδίων με μηδενικό κυματαριθμό, $k_x = 0$, στη διεύθυνση της ροής x και διαταραχών με μη μηδενικό κυματαριθμό k_x , η αστάθεια αυτή εκδηλώνεται από την αλληλεπίδραση μόνο των πρώτων δύο στατιστικών ροπών της στατιστικής δυναμικής. Η στατιστική δυναμική των πρώτων δύο στατιστικών ροπών αντιστοιχεί στη στατιστική δυναμική που παράγεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes στις οποίες οι διαταραχές εξελίσσονται υπό την επίδραση μόνο του στιγμιαίου μέσου πεδίου ταχυτήτων. Η προσέγγιση αυτή των εξισώσεων Navier-Stokes παράγει το σύστημα RNL το οποίο, επειδή περιλαμβάνει τη θεμελιώδη ασταθή αλληλεπίδραση των συνεκτικών δομών, συντηρεί ρεαλιστική τύρβη ακόμα και σε σχετικά μεγάλους αριθμούς Reynolds. Αποδεικνύεται ότι η δυναμική RNL αποκλιμακώνει την τυρβώδη κατάσταση διατηρώντας ένα διαταρακτικό πεδίο που αποτελείται μόνο από ένα μικρό αριθμό x αρμονικών. Η δυναμική RNL αποκαλύπτει με τον τρόπο αυτό τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας της τυρβώδους κατάστασης. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε προσομοίωση στην οποία ρεαλιστική τυρβώδης κατάσταση μπορεί να συντηρηθεί ακόμα με $Re_\tau = 970$ με δυναμική RNL στην οποία οι διαταραχές έχουν μόνο ένα κυματαριθμό στην διεύθυνση της ροής. Η ύπαρξη αυτής της χρονοεξαρτώμενης σαγματικής ευστάθειας λύσης των RNL μπορεί να βοηθήσει στη κατανόηση της δομής του ελκυστή της τυρβώδους κατάστασης χωρίς τους περιορισμούς των απομονωμένων και περιορισμένων στον αριθμό ακριβών περιοδικών σαγματικής ευστάθειας λύσεων των εξισώσεων Navier-Stokes που έχουν βρεθεί πρόσφατα (βλ. Kawahara et al. (2012)).

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τους J. Jiménez και A. Lozano-Durán για τη βοήθεια που τους παρείχαν κατά τη διάρκεια του First Multiflow Workshop 2012 υπό την αιγίδα του European Research Council. Ο Ν. Κωνσταντίνου επιπλέον ευχαριστεί το Κοινοφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης για την οικονομική ενίσχυση που του παρείχε.

Αναφορές

- Adrian, R. J. (2007) Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Phys. Fluids*, **19** (4), 041–301.
- Benney, D. J. (1960) A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. *J. Fluid Mech.*, **10** (02), 209–236.
- Constantinou, N. C., A. Lozano-Durán, M.-A. Nikolaidis, B. F. Farrell, P. J. Ioannou, and J. Jiménez (2014) Turbulence in the highly restricted dynamics of a closure at second order: comparison with DNS. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **506**, 012 004.
- del Álamo, J. C. and J. Jiménez (2006) Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.*, **559**, 205–213.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (1998) Perturbation structure and spectra in turbulent channel flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **11**, 215–227.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2003) Structural stability of turbulent jets. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 2101–2118.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2012) Dynamics of streamwise rolls and streaks in turbulent wall-bounded shear flow. *J. Fluid Mech.*, **708**, 149–196.
- Frisch, U. (1995) *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- Hamilton, K., J. Kim, and F. Waleffe (1995) Regeneration Mechanisms of Near-Wall Turbulence Structures. *J. Fluid Mech.*, **287**, 317–348.
- Hopf, E. (1952) Statistical hydromechanics and functional calculus. *J. Ration. Mech. Anal.*, **1**, 87–123.
- Hutchins, N. and I. Marusic (2007a) Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **579**, 1–28.
- Hutchins, N. and I. Marusic (2007b) Large-scale influences in near-wall turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **365** (1852), 647–664.
- Kawahara, G., M. Uhlmann, and L. Van Veen (2012) The significance of simple invariant solutions in turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **44**, 203–225.
- Kim, J., P. Moin, and R. Moser (1987) Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **177**, 133–166.
- Kline, S. J., W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler (1967) The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **30**, 741–773.
- Marston, J. B., E. Conover, and T. Schneider (2008) Statistics of an unstable barotropic jet from a cumulant expansion. *J. Atmos. Sci.*, **65** (6), 1955–1966.
- Marusic, I., B. J. McKeon, P. Monkewitz, H. M. Nagib, and K. R. Sreenivasan (2010) Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues. *Phys. Fluids*, **22**, 065 103.
- Schoppa, W. and F. Hussain (2002) Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **453**, 57–108.
- Thomas, V., B. K. Lieu, M. R. Jovanović, B. F. Farrell, P. J. Ioannou, and D. F. Gayme (2014) Self-sustaining turbulence in a restricted nonlinear model of plane Couette flow. *Phys. Fluids*, **26**, 105 112.
- Toh, S. and T. Itano (2005) Interaction between a large-scale structure and near-wall structures in channel flow. *J. Fluid Mech.*, **524**, 249–262.
- Waleffe, F. (1997) On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids A*, **9**, 883–900.
- Wu, X. and P. Moin (2009) Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **630**, 5–41.

SIMPLIFIED TURBULENCE IN WALL-BOUNDED FLOWS

Petros J. Ioannou*, Marios-Andreas Nikolaidis and Navid C. Constantinou

Department of Physics, National and Kapodistrian University of Athens, Athens

* e-mail: pjioannou@phys.uoa.gr

ABSTRACT

We present numerical simulations which show that a realistic and self-sustaining turbulent state at $Re_\tau = 970$ can be maintained with a single nonzero Fourier streamwise component without any other modification of the Navier-Stokes equations. The turbulent state is operating with the characteristic self-sustaining process (SSP) that operates in the inner wall region. This simplified turbulent state can lead to understanding of the dynamics of the SSP and also serve as the platform for designing control strategies of the turbulent state that go beyond the already existing linear strategies.

Keywords: fully turbulent flow, coherent structures, rolls, streaks, statistical dynamics, control of the turbulent state