

Δυναμική του εξαγωνικού αεροχείμαρρου του πλανήτη Κρόνου

Πέτρος Ι. Ιωάννου

Τμήμα Φυσικής, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

* e-mail: pjiannou@phys.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Όταν ο Voyager προσέγγισε τον πλανήτη Κρόνο αποκάλυψε στα υψηλά γεωγραφικά πλάτη ένα εξαγωνικό αεροχείμαρρο μέσης ταχύτητας της τάξης των 100 ms^{-1} . Παρότι ο αεροχείμαρρος αυτός βρίσκεται σε περιβάλλον ισχυρής τύρβης είναι σταθερός και σχεδόν αμετάβλητος. Στην εργασία αυτή μελετούμε την στατιστική δυναμική της τυρβώδους ροής στο περιβάλλον του Κρόνου και δείχνουμε ότι οι ροές στους εξωτερικούς πλανήτες λαμβάνουν ασυμπτωτικά καθολική μορφή συμβατή με τις παρατηρήσεις και προτείνουμε εξήγηση για τη σταθερότητά τους.

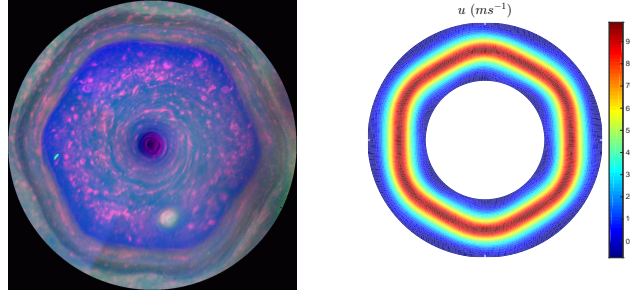
Λέξεις κλειδιά: συνεκτικές δομές, τυρβώδης ροή, εξωτερικοί πλανήτες

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο της δημιουργίας μεγάλης κλίμακας ροών από μικρής κλίμακας τύρβη, όπως οι ζωνικοί άνεμοι στους εξωτερικούς πλανήτες, έχει μελετηθεί διεξοδικά (Cho and Polvani 1996, Galperin et al. 2014, Huang and Robinson 1998, Kraichnan 1967, Panetta 1993, Rhines 1975) αλλά οι φυσικοί μηχανισμοί που οδηγούν σε αυτή την οργάνωση είναι επίμαχο θέμα. Η κυριάρχια των ζωνικών δομών έγκειται στο ότι κάθε ζωνική ροή είναι μη γραμμική λύση των εξισώσεων κίνησης στο όριο μηδενικού ιξώδους και συνεπώς δεν καταστρέφονται από τους όρους μεταφοράς. Η παρατήρηση αυτή όμως δεν είναι επαρκής εξήγηση της σχεδόν αμετάβλητης παρουσίας αυτών των ροών διότι: α) οι ζωνικές ροές στους πλανήτες έχουν χαρακτηριστική μορφή ενώ κάθε ζωνική ροή είναι σημείο ισορροπίας του ιδανικού ρευστού, β) οι λύσεις αυτές φθίνουν όταν υπάρχει ιξώδες και συνεπώς πρέπει να υπάρχει κάποιος μηχανισμός διατήρησης των δομών αυτών όταν δεν υπάρχει κάποια εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη ή πίεση που τις συντηρεί και γ) οι ζωνικές αυτές ροές είναι συνήθως ασταθείς (Barbosa Aguiar et al. 2010). Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε μία γενική θεωρία η οποία φιλοδοξεί να εξηγήσει συνεκτικές δομές, όπως π.χ. τον εξαγωνικό αεροχείμαρρο στον Κρόνο (βλ. Σχ. 1), το μηχανισμό σχηματισμού και διατήρησης του ζωνικού ανέμου, τη συγκεκριμένη μορφολογία της ροής και τη σταθερότητα της. Στην περίπτωση του Κρόνου απαιτείται επιπλέον να εξηγηθεί η εμφάνιση ενός μονοχρωματικού κύματος μεγάλου πλάτους που δίνει στο ζωνικό αεροχείμαρρο το χαρακτηριστικό εξαγωνικό του σχήμα.

2. ΘΕΩΡΗΣΗ

Τα ανώτερα στρώματα των εξωτερικών πλανητών βρίσκονται σε τυρβώδη κατάσταση η οποία συντηρείται από τη στροβιλότητα θερμικών ρευμάτων από το εσωτερικό του πλανήτη (Vasavada et al. 2006). Ο Κρόνος π.χ. δέχεται περί τα 4 W m^{-2} από τον Ήλιο και αντίστοιχη ποσότητα από το εσωτερικό του πλανήτη, που προέρχεται από τη συνεχιζόμενη βαρυτική συρρίκνωση του πλανήτη και τη λανθάνουσα ενέργεια από την αλλαγή φάσης του Ηλίου. Θέλουμε να μελετήσουμε πως μπορεί να οργανωθεί η τυρβώδης κατάσταση σε τέτοιες περιπτώσεις. Έχουμε δείξει ότι η απόκριση ενός πλανήτη στις μεγάλες κλίμακες είναι οιονεί βαροτροπική, αν υποθεθεί ότι ο πλανήτης χαρακτηρίζεται κατ' ουσία από καθ' ύψος στατιστική ομογένεια (Bakas and Ioannou 2016, Farrell and Ioannou 2016). Συνεπώς θεωρούμε ότι τα κύρια χαρακτηριστικά της δυναμικής των ατμοσφαιρών των πλανητών αυτών μπορούν να προκύψουν από τη δυναμική ενός βαροτροπικού ρευστού σε μία σχετικά λεπτή σφαιρική ζώνη στην επιφάνεια του πλανήτη,



Σχήμα 1: Αριστερά: Σύνθεση φωτογραφιών από το Cassini του βόρειου πόλου του Κρόνου ($60 - 90^\circ N$) το 2013 με χρήση CB2 φίλτρου που δίνει πληροφορίες για τη κίνηση των νεφών στα χαμηλότερα στρώματα της ατμοσφαιρας (0.5 atm). Φαίνεται ο εξαγωνικός αεροχειμάρρος ο οποίος λαμβάνει αυτό το σχήμα απο την υπέρθεση ζωνικού ανέμου 100 ms^{-1} με κύμα κυματαριθμού 6 με προς βορρά ταχύτητα 18 ms^{-1} . Δεξιά: Ο αεροχειμάρρος όπως προβλέπεται από τη θεωρία (βλ. [Farrell and Ioannou \(2016\)](#)).

παράλληλη στον ισημερινό, την οποία προσεγγίζουμε με ένα επίπεδο κανάλι με περιοδικές συνοριακές συνθήκες στη ζωνική διεύθυνση, x , αλλά και για απλότητα των υπολογισμών και στην προς τον πόλο, y , διεύθυνση. Το ρευστό λαμβάνεται ασυμπίεστο με ζωνική ταχύτητα $u = -\partial_y \psi$ ως προς το σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με τη τοπική γωνιακή ταχύτητα, $\Omega_0 = \Omega \sin \phi_0$, του κέντρου του καναλιού (Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλανήτη και ϕ_0 το γεωγραφικό πλάτος του κέντρου του καναλιού) και με πολική ταχύτητα $v = \partial_x \psi$. Το ρευστό υπόκειται σε στατιστικά ομογενή στοχαστική διέγερση και διέπεται από την εξίσωση διατήρησης του ολικού στροβιλισμού στον περιστρεφόμενο πλανήτη:

$$\partial_t q + u \partial_x q + v \partial_y q + \beta v = \mathcal{D}(q) + \sqrt{\epsilon} f, \quad (1)$$

όπου $q = \Delta \psi$, με $\Delta \equiv \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$, είναι ο σχετικός στροβιλισμός του ρευστού. Οι διαστάσεις του καναλιού της ροής είναι L_x και L_y και επιβάλουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες έτσι ώστε $q(x, y, t) = q(x + n_1 L_x, y + n_2 L_y, t)$ για όλους τους ακέραιους n_1, n_2 . Ο όρος $2\Omega_0 + \beta y$ είναι ο σε γραμμική πρόσεγγιση πλανητικός στροβιλισμός σε απόσταση $y = R(\phi - \phi_0)$ από το κέντρο του καναλιού, όπου R η ακτίνα του πλανήτη και ϕ το γεωγραφικό πλάτος. Η επιρροή στη δυναμική της σφαιρικότητας του πλανήτη εισέρχεται μέσω της παραμέτρου $\beta = 2\Omega \cos \phi / R$. Η καρτεσιανή αυτή προσέγγιση έχει εισαχθεί από τον Rossby ([Rossby and Collaborators 1939](#)) και αποτελεί ακρογωνιαία προσέγγιση της δυναμικής των ρευστών σε περιστρεφόμενους πλανήτες. Η $\mathcal{D}(q)$ είναι η ανάλωση του στροβιλισμού και ο $\sqrt{\epsilon} f(x, y, t)$ η στοχαστική πηγή στροβιλισμού από τις μικρής κλίμακας θερμικές αστάθειες (για μία πρόσφατη ανάλυση των χαρακτηριστικών αυτής της διέγερσης βλ. [Galperin et al. \(2014\)](#)), ενώ η παράμετρος ϵ προσδιορίζει το πλάτος της διέγερσης. Θεωρούμε ότι η διέγερση είναι μια Γκαουσιανή χωρικά και χρονικά ομογενής στοχαστική ανέλιξη με μηδενική μέση τιμή, και δέλτα χρονική συσχέτιση, που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\langle f \rangle = 0, \quad \langle f(\mathbf{x}_1, t_1) f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) Q(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (2)$$

όπου $\mathbf{x} = (x, y)$ και η συνάρτηση $Q(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ προσδιορίζει τη χωρική συσχέτιση, της οποίας η εξάρτηση από τη διαφορά $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ εξασφαλίζει τη στατιστική χωρική ομογένεια της διέγερσης. Η $\langle \cdot \rangle$ είναι η μέση τιμή των τιμών της συλλογής εκφάνσεων του πεδίου του ρευστού από όλες τις πιθανές διεγέρσεις, δηλαδή η μέση τιμή συλλογής (ensemble mean).

Η στατιστική δυναμική δεν μπορεί όμως να οικοδομηθεί στην περίπτωση των προβλημάτων μας μέσω της μέσης τιμής συλλογής, διότι δεν έχουμε στη διάθεσή μας συλλογή πλανητών ή συλλογή εργαστηριακών σωλήνων, και εξ' άλλου αυτή η μέση τιμή δεν θα είχε και φυσικό αντίκρουσμα: τι θα σήμαινε ο μέσος άνεμος που εμφανίζεται σε κάποιο σημείο σε όλους τους πλανήτες που είναι ίδιοι με τον δικό μας; Συνεπώς είναι αναγκαίο να κάνουμε χρήση μίας μέσης τιμής που μπορεί να υπολογισθεί, να είναι συμβατή με τη παρατηρήσιμη δομή της τυρβώδους κατάστασης, να ικανοποιεί συνθήκες εργοδικότητας

(δηλαδή να ίση με τη μέση τιμή συλλογής) και να ικανοποιεί και αυτή τις συνθήκες του Reynolds:

$$\langle \alpha f + \beta g \rangle = \alpha \langle f \rangle + \beta \langle g \rangle, \langle \partial_t f \rangle = \partial_t \langle f \rangle, \langle \langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle, \quad (3)$$

όπου $f(\mathbf{x}, t)$ και $g(\mathbf{x}, t)$ πεδία ροής και α, β σταθερές (βλ. εδάφιο 3.1 [Monin and Yaglom \(1973\)](#)). Αν π.χ. ορίσουμε ως μέση τιμή την μέση τιμή των πεδίων σε όλο το επίπεδο $\langle \cdot \rangle_{x,y} = (L_x L_y)^{-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \cdot dx dy$, τότε η πρώτη ροπή της ταχύτητας, δηλαδή η μέση ταχύτητα, θα είναι πάντα μηδενική απαγορεύοντας την εμφάνιση μέσου πεδίου ταχυτήτων που μεταβάλλεται στην προς την y διεύθυνση. Συνεπώς η επιλογή αυτής της μέσης τιμής είναι φυσικά αποδεκτή εφόσον η στατιστικά ομογενής κατάσταση είναι ευσταθής κατάσταση της στατιστικής δυναμικής. Η στατιστικά ομογενής κατάσταση της βαροτροπικής τύρβης που διέπεται από την (1) όμως έχει αποδειχθεί ότι είναι ασταθής για ορισμένες τιμές των παραμέτρων ([Constantinou et al. 2014](#), [Farrell and Ioannou 2007](#), [Srinivasan and Young 2012](#)). Αν επιλέξουμε ως στατιστική μέση τιμή τη μέση τιμή στη ζωνική διεύθυνση $\langle \cdot \rangle_x = L_x^{-1} \int_0^{L_x} \cdot dx$ τότε η στατιστική δυναμική μπορεί να προβλέψει μη ομογενείς μέσες ροές στη διεύθυνση y , δεν επιτρέπει όμως το σπάσιμο της στατιστικής συμμετρίας στη x διεύθυνση, π.χ. δεν μπορεί να προβλέψει την εμφάνιση συνεκτικών κυμάτων, τα οποία εμφανίζονται και αυτά σε ορισμένες τιμές των παραμέτρων ([Bakas and Ioannou 2014](#)). Στη μελέτη για τη δομή των ανέμων στους εξωτερικούς πλανήτες θα μελετήσουμε τη στατιστική δυναμική επιλέγοντας τη ζωνική μέση τιμή, $\langle \cdot \rangle_x$, υποθέτοντας ότι αυτή μπορεί να περιγράψει τα παρατηρούμενα φαινόμενα. Θα θεωρήσουμε μάλιστα ότι η επιλογή αυτή επιβεβαιώνεται αν οι παρατηρήσεις είναι συμβατές με τις προβλέψεις της θεωρίας.

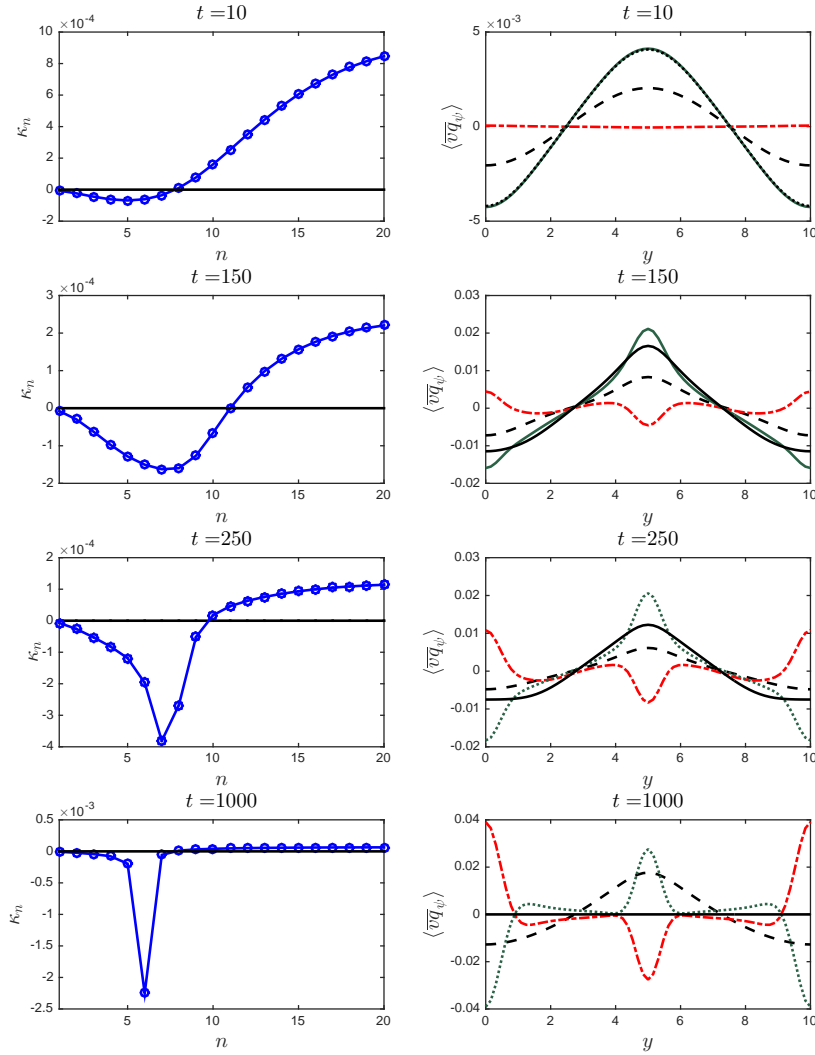
Χωρίζουμε τα πεδία στη μέση τους τιμή και στη διαταραχή από τη μέση τιμή: $q(\mathbf{x}, t) = Q(y, t) + q'(\mathbf{x}, t)$ όπου $Q = \langle q \rangle_x$. Συμβολίζουμε τα μέσα πεδία με κεφαλαία γράμματα και τις διαταραχές με τόνο. Ο μέσος σχετικός στροβιλισμός είναι $Q = -D^2 U$ όπου U η μέση ζωνική ταχύτητα και $D^2 \equiv \partial_{yy}$. Θα υποθέσουμε ότι $V = 0$. Η αρχική (1) χωριζόμενη σε εξίσωση για τις μέσα πεδία και τις διαταραχές είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\partial_t U = \langle v'q' \rangle_x + D_0, \quad (4\alpha')$$

$$\begin{aligned} \partial_t q' &= -U \partial_x q' - (\beta - D^2 U)v' - r q' + \sqrt{\epsilon} f \\ &+ \partial_y [\langle v'q' \rangle_x - v'q'] . \end{aligned} \quad (4\beta')$$

Επιλέξαμε οι διαταραχές να αναλώνονται με γραμμική τριβή τύπου Ekman, $-r q'$ με συντελεστή τριβής r , όπως συνηθίζεται στα περιστρεφόμενα ρευστά, ενώ την τριβή της μέσης ροής, η οποία είναι κατ'ουσίαν μηδαμινή, θα την θεωρήσουμε μηδενική και $D_0 = 0$. Θα θεωρήσουμε δηλαδή το ασυμπτωτικό όριο στο οποίο η μέση ροή έχει μηδενική ανάλωση (βλ. [Farrell and Ioannou \(2016\)](#)). Το όριο αυτό θα αποκαλύψει ότι για αρκούντως μεγάλο β η στατιστική δυναμική καθίσταται αυτο-όμοια με αποτέλεσμα η ροή που προκύπτει στη στατιστική ισορροπία να έχει καθολική δομή. Δηλαδή θα υποστηρίξουμε ότι οι αεροχείμμοι στον Δία και στον Κρόνο είναι κατ'ουσίαν αυτο-όμοιοι.

Η στατιστική δυναμική των (4) οδηγεί σε άπειρη ιεραρχία εξισώσεων για τις στατιστικές ροπές ([Hopf 1952](#)) αλλά η χρησιμότητα της αποδείχτηκε περιορισμένη λόγω αδυναμίας ικανοποιητικού κλείσιματος των απείρων σε αριθμό εξισώσεων των ροπών (βλ. [Frisch \(1995\)](#)). Το μόνο συνεπές κλείσιμο αυτής της ιεραρχίας όπως έδειξε πρώτος ο [Marcinkiewicz \(1939\)](#) προκύπτει μόνο αν κρατήσουμε τις πρώτες δύο ροπές, μηδενίζοντας ή παραμετροποιώντας την τρίτη ροπή. Αυτή η προσέγγιση, η οποία έχει κληθεί S3T οδηγεί σε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ανισότροπες τυρβώδεις ροές ([Bakas and Ioannou 2014](#), [Bouchet et al. 2013](#), [Constantinou et al. 2014](#), [Srinivasan and Young 2012](#), [Tobias and Marston 2013](#)). Η απόρριψη του τελευταίου όρου στην εξίσωση διαταραχών (4β'), η αφαίρεση δηλαδή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ διαταραχών που παράγουν νέες διαταραχές και ευθύνονται για τη κλιμακωτή μεταφορά της ενέργειας στις μικρές κλίμακες (turbulent cascade), οδηγεί στο S3T κλείσιμο των εξισώσεων. Δηλαδή η S3T στατιστική δυναμική προκύπτει ακριβώς ως η στατιστική δυναμική του οιωνεύ-γραμμικού



Σχήμα 2: Αριστερά: κανονικοποιημένος ρυθμός μεταβολής της ενέργειας της μέσης ροής που προκαλείται από τη μεταφορά ορμής από τις διαταραχές με ζωνικό κυματαριθμό n στη μέση ροή, $\kappa_n = \int_0^{L_y} dy U \langle v_{k_n} q_{k_n} \rangle_x / \int_0^{L_y} dy U^2 / 2$ (day^{-1}), συναρτήσει του n για τους χρόνους $t = 10, 150, 250, 1000$. Η ροή συγκλίνει τελικά στη μη ομογενή κατάσταση ισορροπίας του Σχ. 4b. Δεξιά: Η κατανομή στο y του ολικού $\langle v'q' \rangle_x$ (συνεχής γραμμή) (units: $11.57 \text{ ms}^{-1} \text{ day}^{-1}$), μαζί με την ροή ορμής $\sum_{n=12}^{56} \langle v_{k_n} q_{k_n} \rangle_x$ από τις διαταραχές με ζωνικό κυματαριθμό $n \geq 12$ (διακεκομμένη γραμμή) και τη ροή ορμής $\sum_{n=1}^{11} \langle v_{k_n} q_{k_n} \rangle_x$ από τις διαταραχές με ζωνικό κυματαριθμό $n < 12$ (εστιγμένη γραμμή). Ενδεικτικά σχεδιάζεται και η δομή της μέσης ροής στον αντίστοιχο χρόνο (διακεκομμένη γραμμή). Η ροή ορμής από τους αρκούντως μεγάλους κυματαριθμούς είναι σχεδόν πάντοτε αντιδιαχυτική και οι μικρές κλίμακας διαταραχές σχηματίζουν και ενισχύουν συνεχώς τη μέση ροή (βλ. Bakas and Ioannou (2013b)). Η ισορροπία επιτυγχάνεται με την αντίθετη ροή ορμής προς τις μεγάλης κλίμακας διαταραχές στις οποίες μεταφέρεται ενέργεια από τη μέση ροή. Η κατάσταση ισορροπίας έχει επιτευχθεί στο χρόνο $t = 1000$ όπου ικανοποιείται η συνθήκη $\langle v'q' \rangle_x(y) = 0$. Η ροή υποστηρίζει το σχεδόν ουδέτερο κύμα $n = 6$ το οποίο κυριαχεί την ενέργεια των διαταραχών. Η κατανομή της ολικής ζωνικής ταχύτητας που προκύπτει σχεδιάζεται στο Σχ. 1 (δεξιά). Παράμετροι: $N_k = 64$, $\varepsilon = 1$ και κάθε ζωνική αρμονική δέχεται 10^{-4} Wkg^{-1} , $L_y = 10^4 \text{ km}$, $L_x = 8 \times 10^4 \text{ km}$, $r = 0.2 \text{ day}^{-1}$ και $\tilde{\beta} = 6.9$.

συστήματος:

$$\partial_t U = \langle v' q' \rangle_x , \quad (5\alpha')$$

$$\partial_t q' = -U \partial_x q' - (\beta - D^2 U) v' - r q' + \sqrt{\epsilon} f , \quad (5\beta')$$

η οποία μπορεί να γραφεί αναπτύσσοντας τα πεδία, λόγω της περιοδικότητας στη x διεύθυνση, σε σειρά Fourier: $q' = \text{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_{k_n}(y, t) e^{ik_n x} \right)$, όπου Re συμβολίζει το πραγματικό μέρος και $k_n = 2\pi n/L_x$ το κυματαριθμό που αντιστοιχεί στην n -οστή ζωνική αρμονική του καναλιού, στη μορφή:

$$\partial_t U = \langle v' q' \rangle_x , \quad (6\alpha')$$

$$\partial_t q_{k_n} = A_{k_n}(U) q_{k_n} + \sqrt{\epsilon} f_{k_n} , \quad (6\beta')$$

όπου

$$A_{k_n}(U) = -ik_n U - ik_n(\beta - D^2 U) \Delta_{k_n}^{-1} - r , \quad (7)$$

$\Delta_{k_n} = D^2 - k_n^2$ η Λαπλασιανή και $\Delta_{k_n}^{-1}$ ο αντίστροφος τελεστής της Δ_{k_n} . Το f_{k_n} είναι το αντίστοιχο πλάτος της διέγερσης και η στατιστική ομογένεια της διέγερσης απαιτεί να είναι

$$Q(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_k} \text{Re} \left(Q_{k_n}(1, 2) e^{ik_n(x_1 - x_2)} \right) , \quad \text{όπου } Q_{k_n}(1, 2) = \langle f_{k_n}(y_1, t) f_{k_n}^*(y_2, t) \rangle , \quad (8)$$

και το $*$ συμβολίζει τον συζυγή μιγαδικό, έχοντας υποθέσει ότι η διέγερση περιλαμβάνει N_k αρμονικές. Λόγω της ανυπαρξίας κλιμακωτής μεταφοράς σε άλλους ζωνικούς κυματαριθμούς στην (6β') οι αρμονικές του διαταρακτικού πεδίου είναι μόνο οι N_k αρμονικές που διεγείρονται από την εξωτερική διέγερση και συνεπώς $q' = \text{Re} \left(\sum_{k=1}^{N_k} q_{k_n} e^{ik_n x} \right)$. Αν ορίσουμε τη συσχέτιση του πεδίου του στροβιλισμού

$$C_{k_n}(1, 2) \equiv C_{k_n}(y_1, y_2, t) = \langle q'_{k_n}(y_1, t) q'_{k_n}^*(y_2, t) \rangle_x , \quad (9)$$

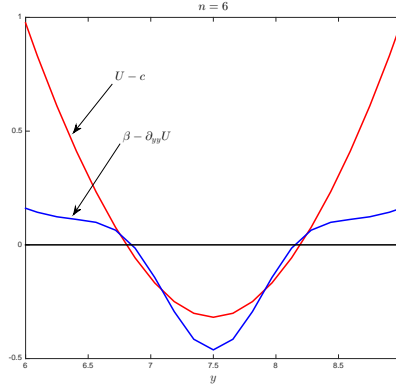
η οποία είναι συνάρτηση των δύο γεωγραφικών πλατών (1 και 2 αντίστοιχα) και του χρόνου, και χρησιμοποιώντας την εργοδικότητα προκύπτει από την (6β') η χρονοεξαρτώμενη εξίσωση του Lyapunov η οποία διέπει την εξέλιξη της συσχέτισης των διαταραχών (της δεύτερης στατιστικής ροπής της τύρβης):

$$\partial_t C_{k_n}(1, 2) = A_{k_n}(1) C_{k_n}(1, 2) + A_{k_n}^*(2) C_{k_n}(1, 2) + \epsilon Q_{k_n}(1, 2) . \quad (10)$$

Στην παραπάνω γραφή με $A_{k_n}(1)$ εννοούμε ότι ο τελεστής $A_{k_n}(U)$ δρα στο σημείο 1 της συνάρτησης δύο μεταβλητών $C(1, 2)$, ομοίως για το $A_{k_n}(2)$. Αντίστοιχα η στατιστική δυναμική μπορεί να ορίσει ένα κλειστό σύστημα διότι η μεταφορά ορμής απο τις διαταραχές στη μέση ροή $\langle v' q' \rangle_x$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική συνάρτηση του $C(1, 2)$. Πράγματι, επειδή $v_{k_n} = ik_n \Delta_{k_n}^{-1} q_{k_n}$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \langle v' q' \rangle_x &= \sum_{n=1}^{N_k} \frac{k_n}{2} \Im \langle \Delta_{k_n}^{-1} q_{k_n} q_{k_n}^* \rangle_x \\ &= \sum_{n=1}^{N_k} \frac{k_n}{2} \Im [\Delta_{k_n}^{-1}(1) C(1, 2)]_{1=2} , \end{aligned} \quad (11)$$

όπου \Im λαμβάνει το φανταστικό μέρος της συνάρτησης, και με $1 = 2$ εννοούμε ότι η συνάρτηση των δύο μεταβλητών 1,2 υπολογίζεται στο ίδιο σημείο. Συνεπώς η στατιστική δυναμική S3T ορίζεται από το



Σχήμα 3: Το $U^e(y) - c$ και το $\beta - D^2 U^e$ συναρτήσεϊ του y στην περιοχή του ελάχιστου της ροής U^e που προκύπτει ως κατάσταση ισορροπίας της S3T δυναμικής με τις παραμέτρους του Σχ. 2. Το c είναι η φασική ταχύτητα του κύματος $n = 6$ που κυριαρχεί το διαταρακτικό πεδίο και είναι σχεδόν ουδέτερο. Στην περιοχή αυτή το $D^2 U$ λαμβάνει την μέγιστη θετική τιμή και η κλίση της μέσης ολικής στροβιλότητας, $\beta - D^2 U$, γίνεται ελάχιστη. Η αλλαγή του προσήμου του $\beta - D^2 U$, θα σηματοδοτούσε την υδροδυναμική αστάθεια της μέσης ροής αλλά αυτό αποφεύγεται διότι οι αναδραστικοί όροι της S3T δυναμικής ρυθμίζουν το κρίσιμο σημείο της ροής $U^e(y) - c = 0$ να συμπίπτει με το μηδενισμό της $\beta - D^2 U$, αναιρώντας την υδροδυναμική αστάθεια του κύματος. Οι τιμές του σχήματος είναι αδιάστατες.

σύστημα:

$$\partial_t U = \sum_{n=1}^{N_k} \frac{k_n}{2} \mathfrak{S} [\Delta_{k_n}^{-1}(1)C(1, 2)]_{1=2}, \quad (12\alpha')$$

$$\partial_t C_{k_n}(1, 2) = A_{k_n}(1)C_{k_n}(1, 2) + A_{k_n}^*(2)C_{k_n}(1, 2) + \varepsilon Q_{k_n}(1, 2). \quad (12\beta')$$

Μέσω του συστήματος αυτού μπορεί να προσδιορισθούν τα σημεία ισορροπίας της στατιστικής δυναμικής και το πεδίο έλξης των. Επίσης μπορεί να μελετηθεί η δομική ευστάθεια της στατιστικής της τυρβώδους κατάστασης (Farrell and Ioannou 2003).

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

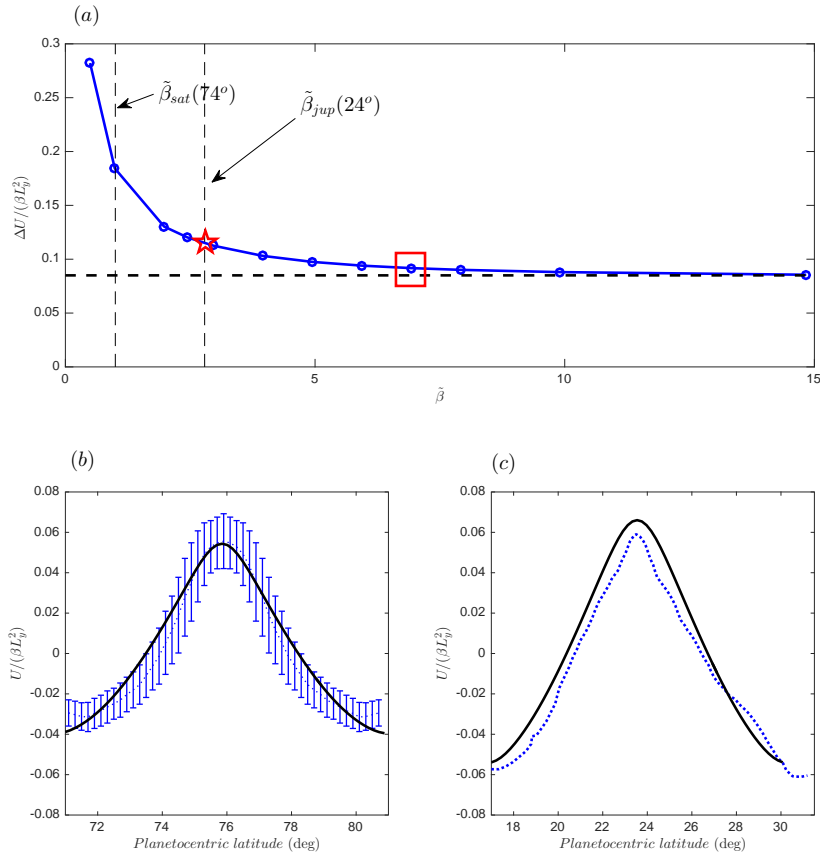
Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\langle v'q' \rangle_x = 0, \quad (13\alpha')$$

$$A_{k_n}(1)C_{k_n}(1, 2) + A_{k_n}^*(2)C_{k_n}(1, 2) = -\varepsilon Q_{k_n}(1, 2). \quad (13\beta')$$

Προεξάρχουσα κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, δεδομένου ότι η διέγερση έχει ληφθεί ομογενής, είναι η ομογενής με $U = 0$. Στην περίπτωση αυτή οι διαταραχές έχουν χωρική συσχέτιση ανάλογη με αυτή της διέγερσης, χωρίς εξάρτηση από τη παράμετρο β (Bakas and Ioannou 2011; 2013a, Srinivasan and Young 2012).

Η ομογενής αυτή κατάσταση καθίσταται ασταθής όσο το ε αυξάνεται και η στατιστική ισορροπία καθίσταται ανομοιογενής με την εμφάνιση ζωνικών ανέμων. Η εμφάνιση της μέσης ροής και η διαδικασία εξισορρόπησης της παρουσιάζεται στο Σχ. 2. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται απaráλλακτη αν $\tilde{\beta} \equiv \beta/\beta_{sat74} > 3$, όπου β_{sat74} η πλανητική τιμή του β στον Κρόνο στο γεωγραφικό πλάτος 74° N που βρίσκεται ο εξαγωνικός αεροχειμάρρος. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η τελική κατάσταση είναι ο σχηματισμός μίας μέσης ροής η οποία υποστηρίζει για $\tilde{\beta} > 3$ ένα σχεδόν ουδέτερο κύμα που κυριαρχεί το διαταρακτικό πεδίο, το οποίο στην περίπτωση του αεροχειμάρρου του Κρόνου είναι η έκτη αρμονική, όπως στις παρατηρήσεις. Η ουδέτερη σταθερότητα του κύματος αυτού επιτυγχάνεται με την αναδραστική δυναμική που εμπεριέχεται στη S3T δυναμική, η οποία επιτυγχάνει να μηδενίσει την κλίση της



Σχήμα 4: (α): εξάρτηση του αδιάστατου πλάτους της ροής $\Delta U / (\beta L_y^2)$ από το $\tilde{\beta} = \beta / \beta_{sat74}$, όπου β_{sat74} η πλανητική τιμή του β στον Κρόνο στο γεωγραφικό πλάτος 74° N, που βρίσκεται το εξάγωνο. Για μεγάλες τιμές του $\tilde{\beta}$ οι ροές λαμβάνουν καθολική μορφή. (β): ο αεροχείμαρρος στο ΒΠ του Κρόνου από τον Antuñaño et al. (2015) (με τελείες και με ένδειξη του σφάλματος των μετρήσεων μίας τυπικής απόκλισης) και η σύγκριση του με τον αντίστοιχο ζωνικό άνεμο της θεωρίας. Η θεωρία για να είναι συμβατή με τις παρατηρήσεις προβλέπει ότι το ενεργό β στον Κρόνο πρέπει να είναι $\tilde{\beta} = 6.9$ (σημειώνεται με τετράγωνο στον (α)), και συνεπώς προβλέπει ότι πρέπει να υπάρχει τοπογραφική κλίση στο εσωτερικό του πλανήτη που αυξάνει καταλλήλως το β για να έχει ο άνεμος το παρατηρούμενο πλάτος και οι διαταραχές να επικεντρώνονται σε ένα κύμα κατάλληλου πλάτους έτσι ώστε να προκύπτει το παρατηρούμενο εξάγωνο. (γ): τα αντίστοιχα για την περίπτωση του αεροχείμαρρου του Δία 24° N από τις παρατηρήσεις του Sánchez-Lavega et al. (2008). Η ροή αυτή σντιστοιχεί στη πλανητική τιμή του β στο γεωγραφικό πλάτος 24° και σημειώνεται με αστέρι στον (α).

μέσης στροβιλότητας, $\beta - D^2U$, στα γεωγραφικά πλάτη που η ταχύτητα του κύματος συμπίπτει με τη ταχύτητα της μέσης ροής (βλ. Σχ. 3).

Η μηδενική ανάλωση στη μέση ροή οδηγεί σε απλοποίηση της εξάρτησης της μέσης ροής, $U^e(y)$, από τις παραμέτρους του προβλήματος, διότι η απαίτηση ισορροπίας, οι διαταραχές αλληλεπιδρώντας με το $U^e(y)$ στην $13\beta'$ να παράγουν $\langle v'q' \rangle_x = 0$, είναι ανεξάρτητη από το ε και συνεπώς το $U^e(y)$ είναι και αυτό ανεξάρτητο από το ε . Η ενέργεια των διαταραχών η οποία είναι συγκεντρωμένη σε ένα μονοχρωματικό κύμα έχει εξάρτηση από το ε , και όχι από το r διότι το κύμα είναι σχεδόν ουδέτερο. Συνεπώς, σε αυτό το ασυμπτωτικό όριο η μέση ροή εξαρτάται μόνο από το β και το πλάτος του καναλιού, L_y , και η δομή του $U^e(y)$ συγκλίνει σε μία καθολική μορφή, με το αδιάστατο πλάτος της ροής $\Delta U / \beta L_y^2$ να λαμβάνει για αρκούντως μεγάλο β τη σταθερή τιμή 0.085 όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Η προβλεπόμενη καθολική δομή είναι πράγματι συμβατή με τις παρατηρήσεις του ζωνικού ανέμου του εξαιρετικού αεροχειμάρρου στα 24°N του Δία, όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Ο ζωνικός άνεμος του εξαγωνικού αεροχειμάρρου έχει μεν τη καθολική δομή, αλλά αυτό απαιτεί το β να είναι 6.9 μεγαλύτερο από το πλανητικό β_{sat74} . Λόγω της καθολικότητας της δυναμικής και της ευνοϊκής σύγκρισης των θεωρητικών προβλέψεων με τις παρατηρήσεις οδηγούμαστε αναπόφευκτα στο συμπέρασμα ότι το ενεργό β του αεροχειμάρρου είναι $\tilde{\beta} \approx 6.9$. Ο φυσικός μηχανισμός ο οποίος θα μπορούσε να παράγει αυτό το ενεργό β είναι ύπαρξη τοπογραφικού β , δηλαδή ο ισοδύναμος πυθμένας του καναλιού να βαθαίνει όσο πλησιάζουμε τον πόλο του πλανήτη. Εκτιμούμε ότι μεταξύ του βόρειου και νότιου άκρου του αεροχειμάρρου, που βρίσκονται σε απόσταση 1000 km, ο ισοδύναμος πυθμένας των ανωτέρων στρωμάτων του Κρόνου πρέπει να μεταβάλλεται από 75 km στο νότο σε 95 km στον βορρά (Farrell and Ioannou 2016).

1 Συμπέρασμα

Εξετάσαμε τη στατιστική δυναμική ενός βαροτροπικού ρευστού σε σχετικά στενά και μικρά κανάλια, όπως αυτό στην περιοχή που βρίσκεται ο εξαγωνικός αεροχειμάρρος στον Κρόνο. Η S3T δυναμική στο ασυμπτωτικό όριο μηδενικής τριβής της μέσης ροής οδηγεί σε μέσες ροές που εξαρτώνται μόνο από το βL_y^2 , όπου το L_y είναι η απόσταση μεταξύ των ελαχίστων του ανέμου εκατέρωθεν του αεροχειμάρρου. Η καθολική μορφή του ανέμου στη κατάσταση στατιστικής ισορροπίας και η σύμπτωση με τις παρατηρήσεις μας οδηγεί να προβλέψουμε ότι ο εξαγωνικός αεροχειμάρρος του Κρόνου βρίσκεται υπό την επιρροή τοπογραφικού β , μεγέθους που η θεωρία εκτιμά, το οποίο είναι παρατηρήσιμο σε δορυφορική αποστολή.

Αναφορές

- Antuñano, A., T. del Río-Gaztelurrutia, A. Sánchez-Lavega, and R. Hueso (2015) Dynamics of Saturn's polar regions. *J. Geophys. Res.-Planet*, **120** (2), 155–176, URL <http://dx.doi.org/10.1002/2014JE004709>, 2014JE004709.
- Bakas, N. A. and P. J. Ioannou (2011) Structural stability theory of two-dimensional fluid flow under stochastic forcing. *J. Fluid Mech.*, **682**, 332–361.
- Bakas, N. A. and P. J. Ioannou (2013a) Emergence of large scale structure in barotropic β -plane turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 224 501.
- Bakas, N. A. and P. J. Ioannou (2013b) On the mechanism underlying the spontaneous emergence of barotropic zonal jets. *J. Atmos. Sci.*, **70** (7), 2251–2271.
- Bakas, N. A. and P. J. Ioannou (2014) A theory for the emergence of coherent structures in beta-plane turbulence. *J. Fluid Mech.*, **740**, 312–341.
- Bakas, N. A. and P. J. Ioannou (2016) A theory for the emergence of large scale structure in baroclinic turbulence. *Phy. Rev. Fluids*, (submitted).
- Barbosa Aguiar, A. C., P. L. Read, R. D. Wordsworth, T. Salter, and Y. Hiro Yamazaki (2010) A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon. *Icarus*, **206** (2), 755–763.

- Bouchet, F., C. Nardini, and T. Tangarife (2013) Kinetic theory of jet dynamics in the stochastic barotropic and 2D Navier-Stokes equations. *J. Stat. Phys.*, **153** (4), 572–625.
- Cho, J. Y.-K. and L. M. Polvani (1996) The morphogenesis of bands and zonal winds in the atmospheres on the giant outer planets. *Science*, **273** (5273), 335–337.
- Constantinou, N. C., B. F. Farrell, and P. J. Ioannou (2014) Emergence and equilibration of jets in beta-plane turbulence: applications of Stochastic Structural Stability Theory. *J. Atmos. Sci.*, **71** (5), 1818–1842.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2003) Structural stability of turbulent jets. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 2101–2118.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2007) Structure and spacing of jets in barotropic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 3652–3665.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2016) A statistical state dynamics based theory for the formation and equilibration of Saturn’s North Polar Jet. *Phys. Rev. Fluids*, (submitted, arXiv:1609.06170).
- Frisch, U. (1995) *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- Galperin, B., R. M. Young, S. Sukoriansky, N. Dikovskaya, P. L. Read, A. J. Lancaster, and D. Armstrong (2014) Cassini observations reveal a regime of zonostrophic macroturbulence on Jupiter. *Icarus*, **229**, 295–320.
- Hopf, E. (1952) Statistical hydromechanics and functional calculus. *J. Ration. Mech. Anal.*, **1**, 87–123.
- Huang, H.-P. and W. A. Robinson (1998) Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 611–632.
- Kraichnan, R. H. (1967) Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 1417–1423.
- Marcinkiewicz, J. (1939) Sur une propriété de la loi de Gauss. *Mathematische Zeitschrift*, **44** (1), 612–618.
- Monin, A. S. and A. M. Yaglom (1973) *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, Vol. 1. The MIT Press.
- Panetta, R. L. (1993) Zonal jets in wide baroclinically unstable regions: persistence and scale selection. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2073–2106.
- Rhines, P. B. (1975) Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417–433.
- Rossby, C.-G. and Collaborators (1939) Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Mar. Res.*, **2**, 38–55.
- Sánchez-Lavega, A., et al. (2008) Depth of a strong jovian jet from a planetary-scale disturbance driven by storms. *Nature*, **451** (7177), 437–440.
- Srinivasan, K. and W. R. Young (2012) Zonostrophic instability. *J. Atmos. Sci.*, **69** (5), 1633–1656.
- Tobias, S. M. and J. B. Marston (2013) Direct statistical simulation of out-of-equilibrium jets. *Phys. Rev. Lett.*, **110** (10), 104502.
- Vasavada, A. R., S. Horst, M. Kennedy, and A. Ingersoll (2006) Cassini imaging of Saturn: Southern hemisphere winds and vortices. *Journal of Geophysical Research*.

Petros J. Ioannou

Physics Department, National & Kapodistrian University of Athens, Athens

* e-mail: pjioannou@phys.uoa.gr

Abstract

When Voyager approached Saturn it was realized that near the North pole of the planet at latitude 74° a powerful zonal jet in the shape of a hexagon was located. Despite the powerful turbulence surrounding the jet, the jet appeared to be a steady feature of the planet. In this paper we present a statistical dynamical theory appropriate for turbulent conditions at high latitudes at Saturn and show that the zonal jets that are supported by the ambient turbulent field assume a universal structure that is hydrodynamically stable and agrees with observations.

Keywords: coherent structures, turbulent flow, transition, outer planets, Saturn