Προσδιορισμός της φασματικής ισχύος ενός σήματος

Το φάσμα ενός χρονικά εξαρτώμενου σήματος μας πληροφορεί ¨πόσο σήμα έχουμε σε μία δεδομένη συχνότητα¨.
Έστω μία συνάρτηση μίας μεταβλητής $x(t)$, τότε από το θεώρημα Fourier μπορούμε να αναλύσουμε τη συνάρτηση αυτή σε αρμονικές συχνότητας f:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{-2i\pi f t} df$$

όπου το πλάτος κάθε αρμονικής δίνεται από:

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2i\pi f t} dt.$$

Προτιμήσαμε να χρησιμοποίησουμε τη συχνότητα f (σε κύκλους/μονάδα χρόνου, ή Hz εάν η μονάδα χρόνου είναι το second) αντί της κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$ (με μονάδες rad/μονάδα χρόνου) , διότι αποφεύγονται οι σταθεροί όροι στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier.

Εάν είχαμε στη διάθεση μας τη συνάρτηση, $x(t)$, ή τις τιμές της συνάρτησης στο άπειρο διάστημα $(-\infty, \infty)$ τότε θα μπορούσαμε να αναλύσουμε την $x(t)$ κατά Fourier και να υπολογίσουμε την ισχύ του φάσματος του σήματος σε κάθε συχνότητα (power spectrum): $P(f) \propto |\hat{x}(f)|^2$. Συνήθως, όμως, έχουμε μόνο ένα μικρό δείγμα της $x(t)$, ένα πεπερασμένο αριθμό τιμών από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Εάν αναλύσουμε τότε αυτό το δείγμα της $x(t)$ κατά Fourier και υπολογίσουμε φασματκή ισχύ του σήματος $\widetilde{P}(f)$ προκύπτει το ερώτημα: ποία η σχέση του ιδανικού $\widetilde{P}(f)$ με το $P(f)$;

Για να συγκεκριμενοποίησουμε το ερώτημα θεωρούμε ότι ανά χρονικά διαστήματα $\delta\tau$ μετρούμε την $x(t)$, δηλαδή έχουμε μετρήσεις της $x_n = x(n\delta\tau)$, με $n = \cdots -1,0,1,2,\cdots$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της x_n , $\widetilde{x}(f)$, με τη προσέγγιση του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier:

$$\widetilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) D(t) e^{2i\pi f t} dt \approx \delta\tau \sum_n x_n e^{2i\pi f n\delta\tau},$$

όπου $D(t) = \sum_n \delta(t - n\delta\tau)$.

Χρησιμοποιώντας τη ιδιότητα ότι το γινόμενο δύο συνάρτησεων, $r(t)*s(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το convolution των μετασχηματισμών Fourier των συναρτήσεων αυτών $\hat{r}(f)\otimes\hat{s}(f)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\hat{r}(a)\hat{s}(f-a)da$, μπορεί να υπολογισθεί ότι

$$\widetilde{x}(f)=\sum_n \hat{x}\left(f+\frac{n}{\delta\tau}\right).$$

Η σχέση αυτή μας προσδιορίζει τη σχέση του μετασχηματισμού Fourier του δείγματος του σήματος, $\widetilde{x}(f)$, με τον ακριβή μετασχηματισμό Fourier, $\hat{x}(f)$, της $x(t)$.

Παρατηρείστε ότι το προσεγγιστικό φάσμα είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{\delta\tau}$. Το πλάτος ταλάντωσης στην συχνότητας f του προσεγγιστικού μετασχηματισμού δεν είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης του μετασχηματισμού του ιδανικού σήματος αλλά συντελούν στο πλάτος αυτό αθροιστικά και το πλάτος του ιδανικού σήματος στις αριθμήσιμα άπειρες συχνότητες $f+\frac{n}{\delta\tau}$, όπου $\delta\tau$ το χρονικό διάστημα μεταξύ των μετρήσεων. Το αποτέλεσμα δηλαδή της χρονικά διακριτής δειγματοληψίας του σήματος είναι η μόλυνση του προσεγγιστικού σήματος με ακέραια πολλαπλάσια των συχνοτήτων $\frac{1}{\delta\tau}$. Το φαινόμενο αυτό λέγεται αλληλο-ετερισμός (μεταφράζω το aliasing) .

Για ποιό λόγο εμφανίζεται η συχνότητα $\frac{1}{\delta\tau}$;

'Εστω ότι παρατηρούμε ανά χρονικά διαστήματα $\delta\tau$ ένα φυσικό φαινόμενο του οποίου η συχνότητα είναι f_0, δηλαδή οι τιμές που γνωρίζουμε είναι οι $\sin(2\pi f_0 n\delta\tau)$. Με λίγο σκέψη μπορείτε να δείτε ότι τις ίδιες τιμές θα έδινε και μία ταλάντωση συχνότητας

$$f_0+\frac{k}{\delta\tau} \tag{1}$$

όπου k κάποιος θετικός ή αρνητικός ακέραιος, οπότε το φάσμα των χρονικά διακριτών μετρήσεων θα είναι συναρτήσεις δέλτα επικεντρωμένες στα σημεία $f_0+\frac{k}{\delta\tau}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. Παρατηρείστε ότι η μεγαλύτερη συχνότητα που δεν μπορεί να μολυνθεί από μικρότερες συχνότητες είναι η $\frac{1}{2\delta\tau}$. Συνεπώς άν επιλέξουμε το διάστημα $\delta\tau$ ώστε το φυσικό φαινόμενο να μην έχει φασματική ισχύ για συχνότητες με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από τη συχνότητα $\frac{1}{2\delta\tau}$, τότε ο υπολογισμός του φάσματος στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2\delta\tau},\frac{1}{2\delta\tau}\right]$ είναι απόλυτα ακριβής.

Η πρόταση αυτή έχει γενική ισχύ και ονομάζεται θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon-Whittaker. Το θεώρημα Shannon-Whittaker αποδεικνύει ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ανακατασκευάσει ακριβώς ένα σήμα $x(t)$ από μετρήσεις του σήματος ανά διαστήματα $\delta\tau$ είναι:

$$|\hat{x}(f)| = 0 \text{ για } |f| \geq \frac{1}{2\delta\tau}.$$

Το θεώρημα μάλιστα δίνει και τον αναλυτικό τύπο για τον υπολογισμό της $x(t)$ από τις διακριτές τιμές $x(n\delta\tau)$:

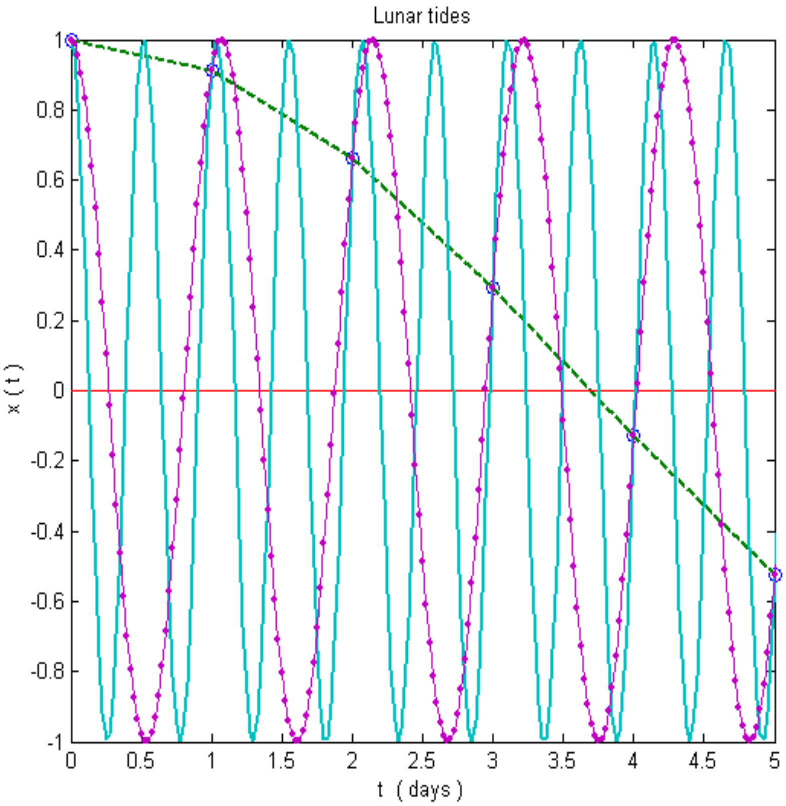
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n\delta\tau) \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{2\delta\tau}(t - n\delta\tau)\right]}{\frac{2\pi}{2\delta\tau}(t - n\delta\tau)}$$

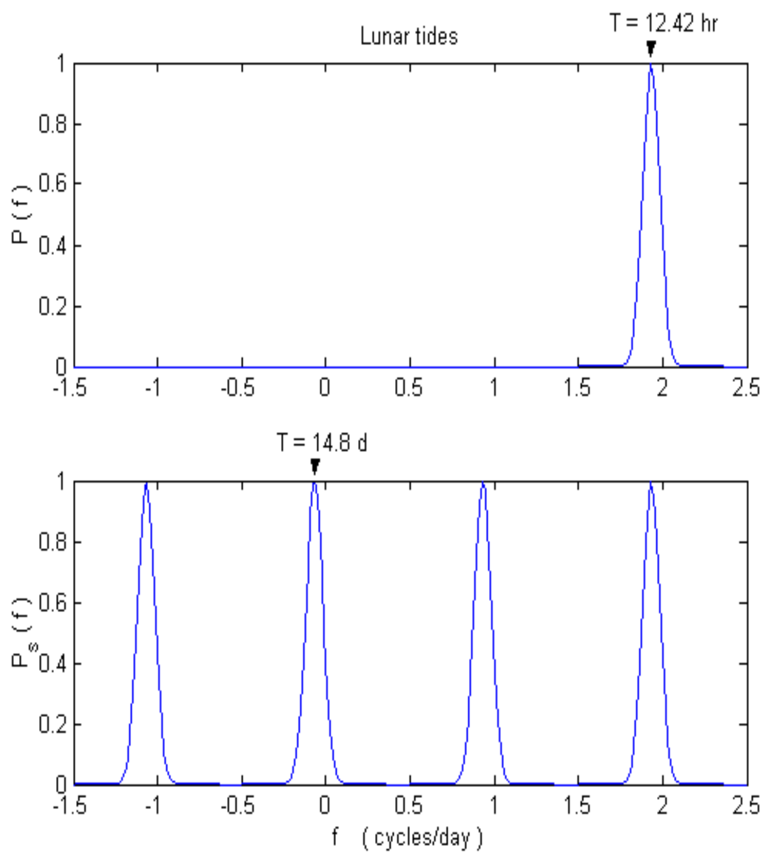
Το θεώρημα Shannon-Whittaker είναι καταπληκτικό διότι παρέχει τις προϋποθέσεις ώστε μία συνάρτηση η οποία λαμβάνει μη αριθμήσιμο πλήθος τιμών να μπορεί να ανακατασκευασθεί πλήρως από ένα αριθμήσιμο πλήθος παρατηρήσεων.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να έχουμε πιστό υπολογισμό του φάσματος θα πρέπει να επιλέξουμε ικανά μικρό, $\delta\tau$, τέτοιο μάλιστα ώστε να μην υπάρχει σημαντική ισχύς του σήματος για συχνότητες μεγαλύτερες του $\frac{1}{2\delta\tau}$. Η συχνότητα $\frac{1}{2\delta\tau}$ λέγεται συχνότητα του Nyquist. ‘Οταν δε υπολογίζουμε τη ισχύ του φάσματος ενός φαινομένου μόνο το διάστημα συχνοτήτων $\left[-\frac{1}{2\delta\tau}, \frac{1}{2\delta\tau}\right]$ αρκεί να υπολογίζεται , διότι το φάσμα όπως είδαμε είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{\delta\tau}$. Αλλά και αντιστρόφως, εάν θέλουμε να αναπαράγουμε ένα φαινόμενο συχνότητας f_0 θα πρέπει να κάνουμε παρατηρήσεις ανά χρονικά διαστήματα μικρότερα του $\frac{1}{2f_0}$ ώστε να πάρουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά κύκλο του φαινομένου (συνήθως για ασφάλεια λαμβάνονται κατ’ελάχιστον 4 δείγματα ανά κύκλο). Ομοίως εάν θέλουμε να μεταδώσουμε πιστά τη μουσική μιάς συμφωνικής ορχήστρας μέσω μίας συσκευής θα πρέπει οι μηχανισμοί να λαμβάνουν δείγματα του ήχου ανά διαστήματα μικρότερα του $\frac{1}{2f_0}$, όπου f_0 η μεγαλύτερη συχνότητα την οποία ενδιαφερόμαστε να μεταφέρουμε (για ήχο συχνότητας $1000Hz$, απαιτείται μηχανισμός με ταχύτητα ανταπόκρισης $0.5ms$, το τηλέφωνο π.χ. είναι σε θέση να έχει τέτοια ανταπόκριση).

Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα περιορίζονται σε μία πεπερασμένη δέσμη (μπάντα) συχνοτήτων. Οπότε η παραπάνω ανάλυση μπορεί να μας καθοδηγήσει στο προσδιορισμό της συχνότητας των παρατηρήσεων που απαιτείται για να τα αναπαράγουμε .

Οι επιπτώσεις της αθέτισης του κριτηρίου του Nyquist μπορεί να είναι καταστρεπτικές. Ως παράδειγμα, αναφέρω τις απαιτήσεις για τη παρατηρήση της κύριας σεληνιακής παλίρροιας στη θάλασσα, η οποία συμβολίζεται με M_2 , που έχει περίοδο 12.42 ώρες, δηλαδή $f_0 = 1.932\ cycles/day$. Για την ακριβή επισήμανση της σεληνιακής παλίρροιας απαιτούνται σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist παρατηρήσεις ανά διαστήματα μικρότερα των $\delta\tau = \dfrac{24}{2\times 1.932} = 6.2$ ωρών, δηλαδή δύο παρατηρήσεις ανά παλιρροιακό κύκλο, ώστε $\dfrac{1}{2\delta\tau} > f_0$. Ας υποθέσουμε ότι ένας ανύποπτος ερευνητής παρατηρεί το ύψος της θάλασσας κάθε μέρα στις 10 π.μ.. Οι παρατηρήσεις του σημειώνονται με ένα κύκλο στο διπλανό σχήμα. Το παραγματικό ύψος της θάλασσας δίνεται από τη συνεχή γραμμή. Αλλά καθώς βλέπεται επειδή η συχνότητα παρατηρήσεων , ανα μία 1 μέρα, είναι μεγαλύτερη από τη κρίσιμο διάστημα παρατηρήσεων Nyquist $\dfrac{1}{2f_0}$, οι ίδιες παρατηρήσεις είναι συνεπείς και με περιοδικά φαινόμενα μικρότερης συχνότητας (σύμφωνα με τον τύπο (1)), $f_0 - 1 = 0.932$ $cycles/day$ και $f_0 - 1 =$ 0.0676 $cycles/day$, και η τελευταία (στο σχήμα είναι η διακεκομμένη γραμμή) , η οποία είναι η μόνη που βρίσκεται στο διάστημα $[-0.5, 0.5]$ συχνοτήτων Nyquist για παρατηρήσεις ανά μία





μέρα, προβλέπει ότι σύμφωνα με τις παρατηρήσεις ότι η περίοδος των παλιρροιών είναι 14.8 μέρες. Τα δύο φάσματα, το ιδανικό και το αλληλο-ετερισμένο που προκύπτει από τις ανα ημέρα παρατηρήσεις , παρουσιάζονται στο δεύτερο σχήμα της προηγούμενης σελίδας. Εάν μεν ο ερευνητής καταλαβαίνει τι συμβαίνει δεν υπάρχει πρόβλημα, αντιλαμβάνεται ότι υπάρχει αλληλο-ετερισμός, και ότι η παραγματική περίοδος των παλιρροιών είναι μία απο τις συχνότητες που δίνει ο τύπος (1) (όπως ακριβώς παρατηρητής ενός περιστρεφόμενου τροχού ποδηλάτου με στροβοσκόπιο δεν ξεγελιέται όταν δεί τις ακτίνες του ποδηλάτου ακίνητες για να συμπεράνει ότι παρατηρεί ένα ακίνητο ποδήλατο). Εάν όμως ο ερευνητής δεν γνώριζε το φαινόμενο των παλιρροιών και πρότεινε στην επιστημονική κοινότητα οτι ανακάλυψε θαλάσσιο φαινόμενο περιόδου 14.8 ημερών θα ήταν σε κίνδυνο να παρουσίασει μαζύ με τις παρατηρήσεις του και κάποια περίεργη θεωρία για να υποστηρίξει τις παρατηρήσεις αυτές. Το παράδειγμα μπορεί να σας φαίνεται απλοϊκό, αλλά πρέπει να γνωρίζετε ότι πολλές φορές ψευδοφαινόμενα τέτοιας μορφής έρχονται στη δημοσιότητα. Σε αυτό το κίνδυνο προφανώς είναι πλέον ευάλωτοι και καλοπροαίρετοι άνθρωποι του τύπου ή και μέλη κυβερνήσεων.