

## Εκκρεμές εξαναγκασμένο με αρμονική εξωτερική δύναμη

Η εξίσωση κίνηση του εκκρεμούς είναι

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \sin\theta = A \cos\omega_F t,$$

όπου  $\theta$  η γωνιακή θέση από το σταθερό σημείο ισορροπίας. Έχουμε συμπεριλάβει και τριβή ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας. Οι μονάδες χρόνου επιλέγησαν έτσι ώστε μικρές ταλαντώσεις, χωρίς απόσβεση, να έχουν περίοδο  $2\pi$ . Θα μελετήσουμε τη κίνηση του εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους της εξωτερικής δύναμης  $A$ . Η συχνότητα του εξαναγκασμού θα παραμείνει σταθερή και θα τη λάβουμε  $\omega_F = 0.667$ . Ομοίως ο συντελεστής απόσβεσης θα ληφθεί  $\mu = 0.5$ , έτσι ώστε σε σχετικό λίγο χρονικό διάστημα το εκκρεμές να περάσει από τη μεταβατική κατάσταση που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες στη κατάσταση που το χαρακτηρίζει ασυμπτωτικά.

Εάν το  $A \ll 1$ , τότε η συμπεριφορά του εκκρεμούς είναι σε πολύ καλή προσέγγιση αυτή αρμονικού ταλαντωτή, οπότε η χρονική εξέλιξη είναι:

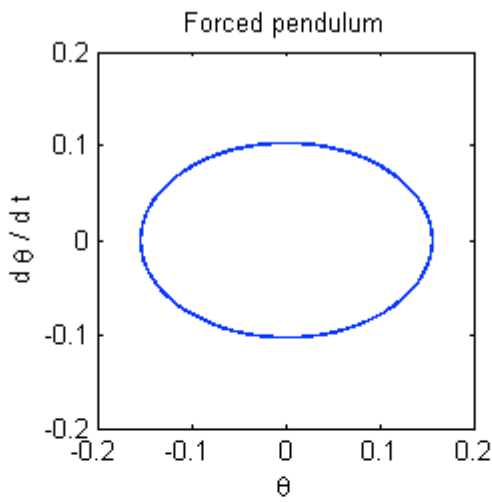
$$\theta = \frac{A}{\sqrt{(1 - \omega_F^2)^2 + \mu^2 \omega_F^2}} \cos(\omega_F t + \phi) + a \exp\left(-\frac{\mu t}{2}\right) \cos(\omega t + \psi)$$

$$\text{με } \tan \phi = -\frac{\mu \omega_F}{1 - \omega_F^2} \text{ και } \omega = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}}.$$

Στην αρχή η συμπεριφορά είναι πολύπλοκη, η φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ( $\omega_0 = 1$ ) σχηματίζει διακρότημα με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης (0.667).

Τελικά όμως οι τροχιές στο χώρο των φάσεων ( $\theta, \dot{\theta}$ ) καταλήγουν στο να περιστρέφονται με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης γύρω από ένα οριακό κύκλο, στον οποίο καταλήγουν όλες οι τροχιές. Η φασματική ισχύς εμφανίζει δύο μέγιστα, τό ένα στη συχνότητα  $\omega_F$  και το άλλο στη συχνότητα  $\omega$ .

Για μεγαλύτερα πλάτη δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις. Η συμπεριφορά γίνεται ολοένα και πιο περίπλοκη και θα τη μελετήσουμε παρακολουθώντας την εξέλιξη της φασματικής ισχύος της γωνιακής θέσης του εκκρεμούς.



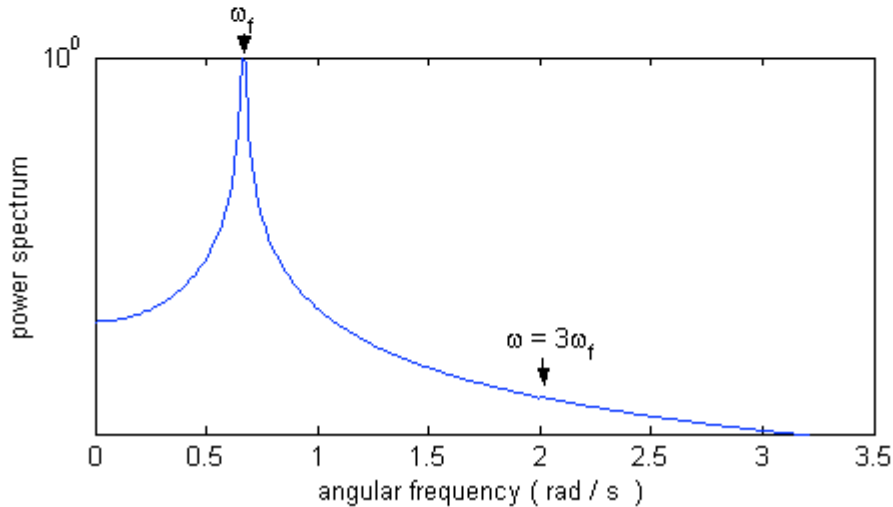
$$A = 0.1$$

$$\mu = 0.5$$

$$\omega_f = 0.667$$

$$\omega_0 = 1$$

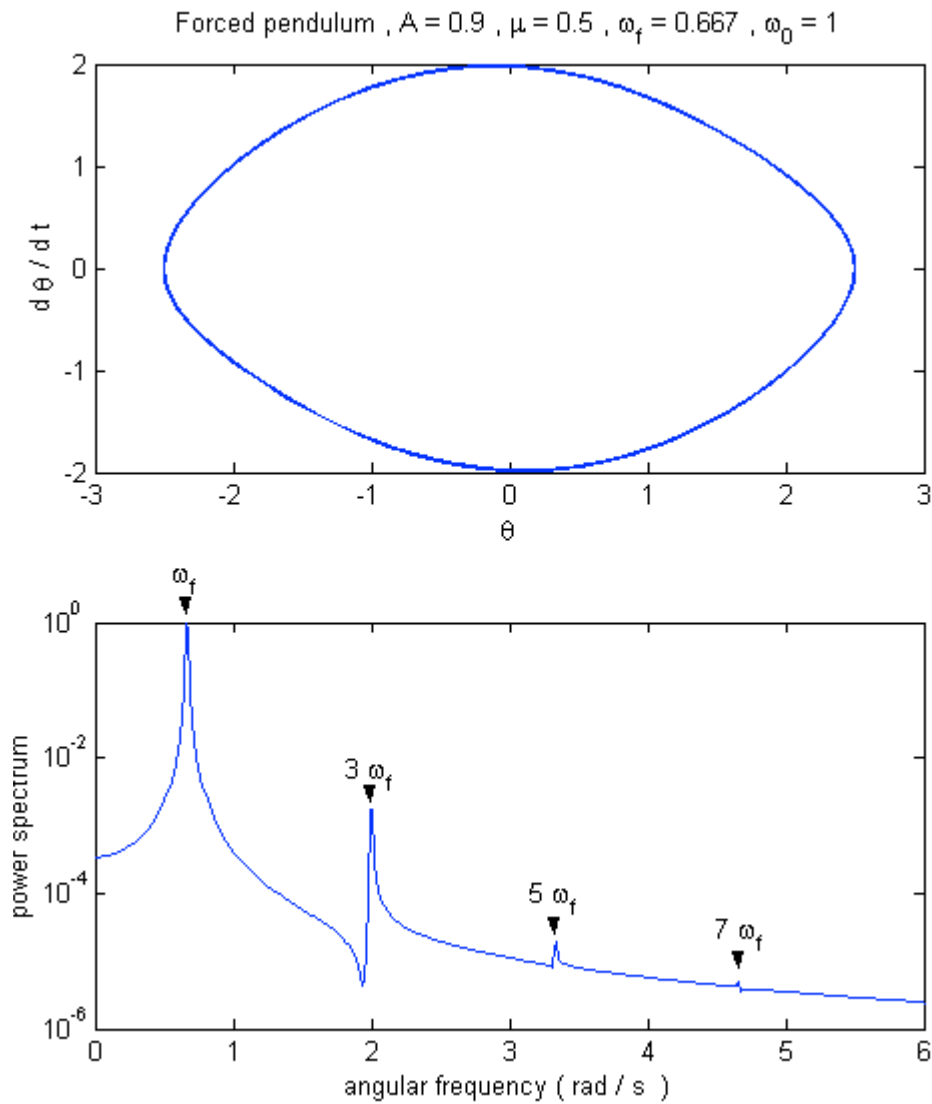
Για μικρή διέγερση, η κίνηση καταλήγει σε ένα σταθερό οριακό κύκλο, και η κίνηση είναι περιοδική. Η καταληκτική κίνηση φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρείστε ότι ο οριακός κύκλος είναι σχεδόν κυκλικός και συνεπώς η φασματική ισχύς είναι αποκλειστικά συγκεντρωμένη στη κύρια συχνότητα  $\omega_F$  με λίγο ισχύ στη συχνότητα  $3\omega_F$  (σχεδόν δεν φαίνεται είναι 6 τάξεις μεγέθους μικρότερη). Οπότε η κίνηση είναι σε μεγάλη προσέγγιση



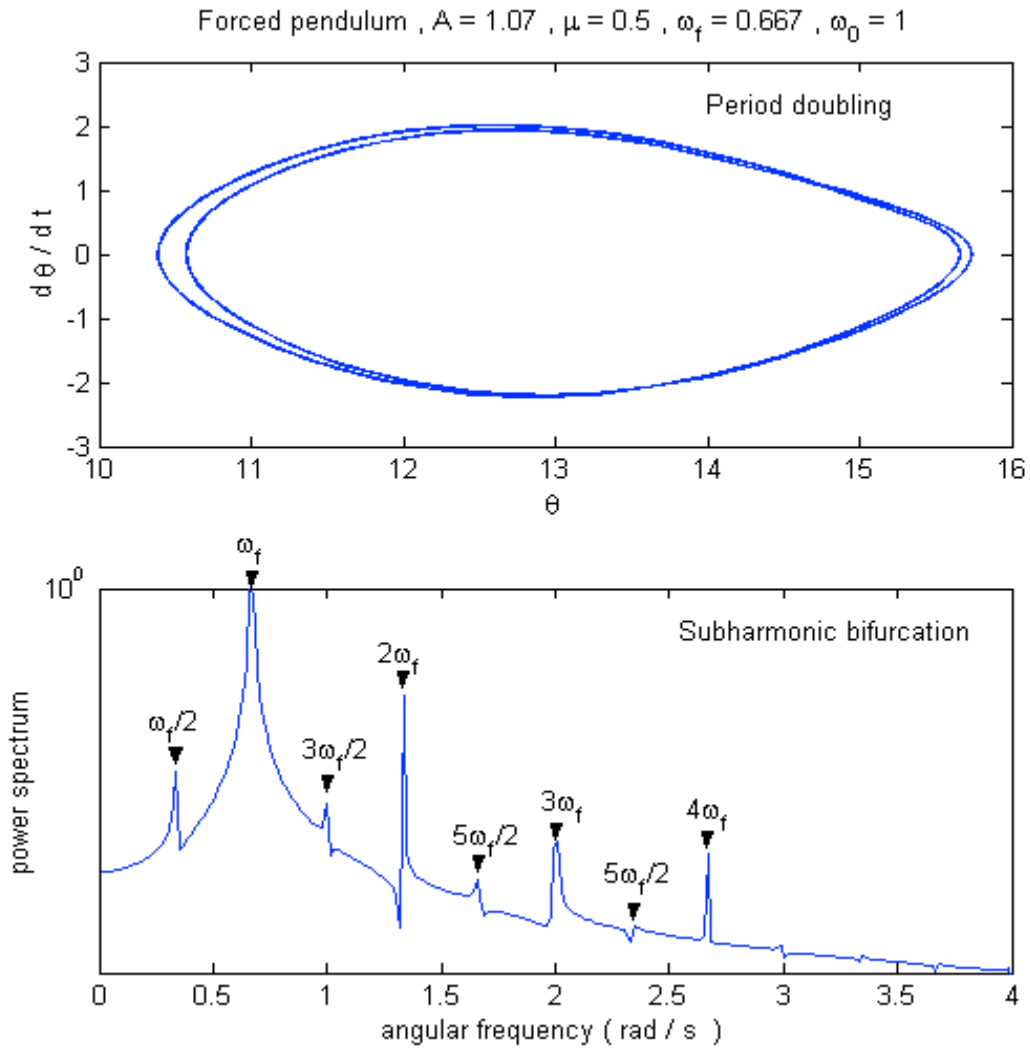
αρμονική. Η συχνότητα  $\omega$  δεν εμφανίζεται διότι παρουσιάζουμε τη φασματική ισχύ της γωνιακής θέσης έχοντας εξαλήψει τη μεταβατική εξέλιξη. Η φασματική ισχύς δεν είναι μία συνάρτηση δέλτα στο  $\omega_F$ , διότι η φασματική ισχύς υπολογίστηκε από ένα περιορισμένο χρονικά δείγμα γωνιακών θέσεων. Όσο επεκτείνουμε το χρόνο συλλογής του δείγματος τόσο περισσότερο η φασματική ισχύς θα προσεγγίζει μία συνάρτηση δέλτα.

Αυξάνουμε το πλάτος της διέγερσης στη τιμή  $A = 0.9$ . Τότε η καταληκτική κίνηση

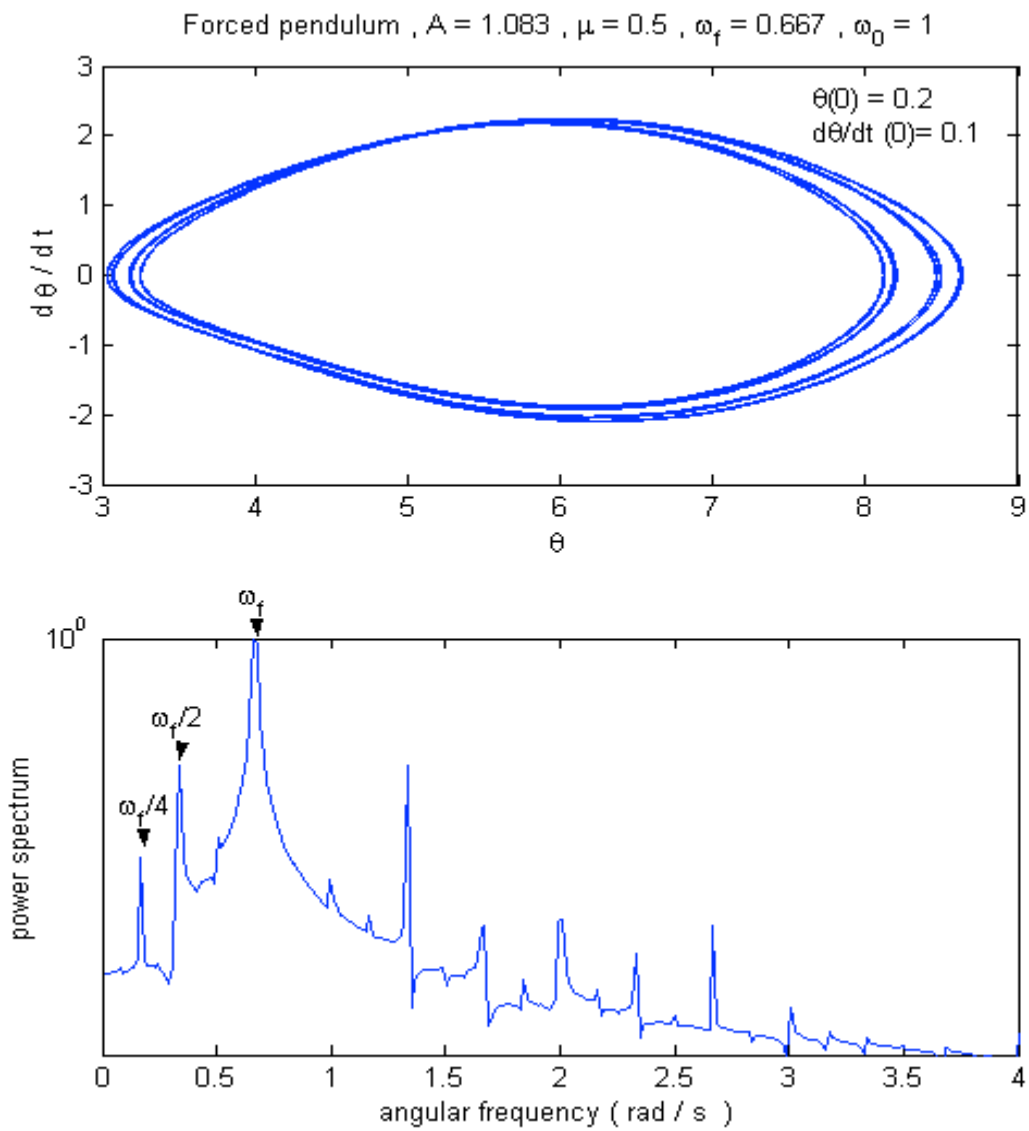
φαίνεται στο σχήμα (και πάλι δεν δείχνουμε τη μεταβατική εξέλιξη). Η κίνηση είναι και πάλι περιοδική, αλλά πλέον ο οριακός κύκλος έχει απομακρυνθεί από τη κυκλική μορφή. Αυτό φαίνεται στο φάσμα της γωνιακής θέσης που δείχνει ότι η κίνηση έχει ανώτερες περιττές αρμονικές της θεμελιώδους συχνότητας.



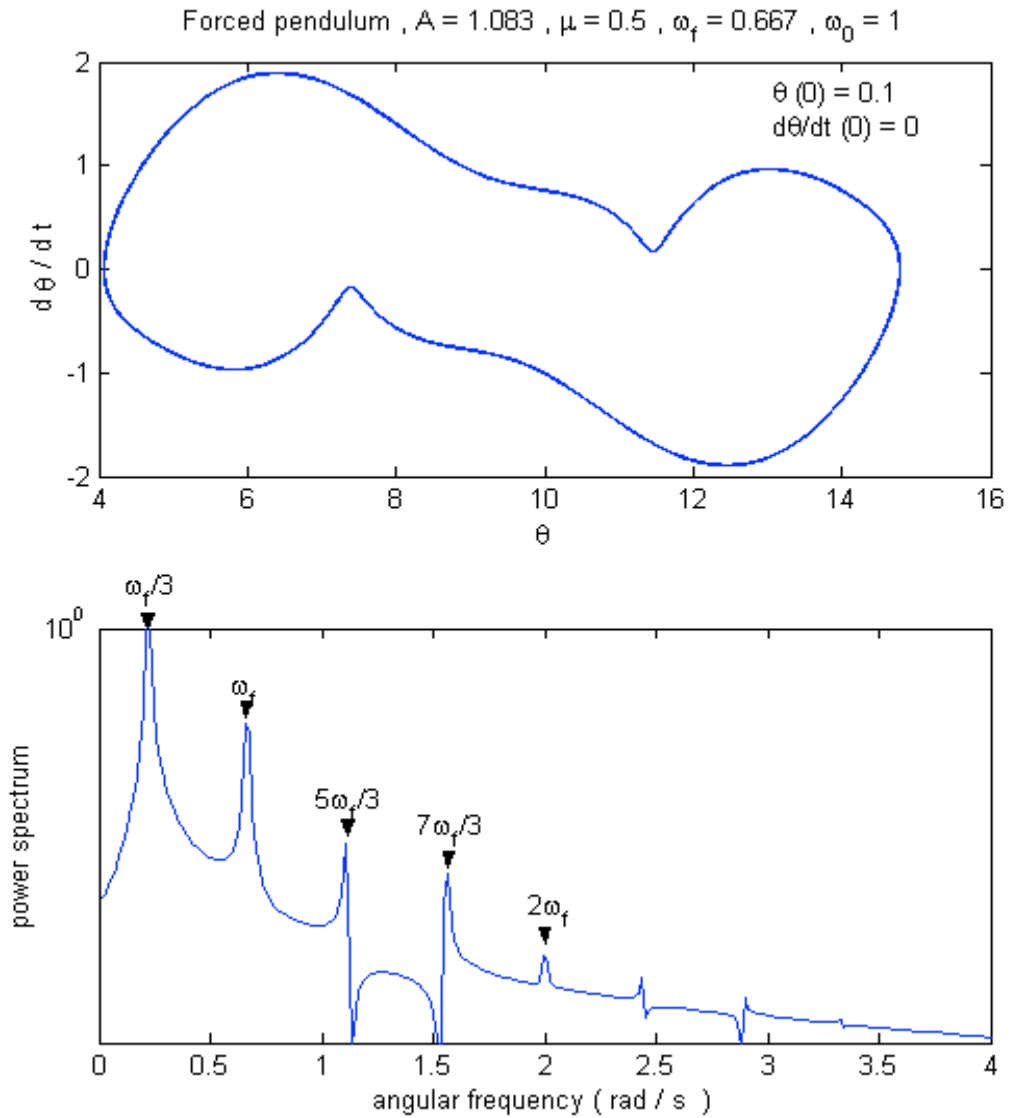
Όταν το πλάτος γίνει  $A = 1.07$  ο οριακός κύκλος γίνεται διπλός και έχει διπλάσια περίοδο. Αυτό φαίνεται στο γράφημα της φασματικής ισχύος η οποία αποκτά κορυφή στην υποδιπλάσια συχνότητα.



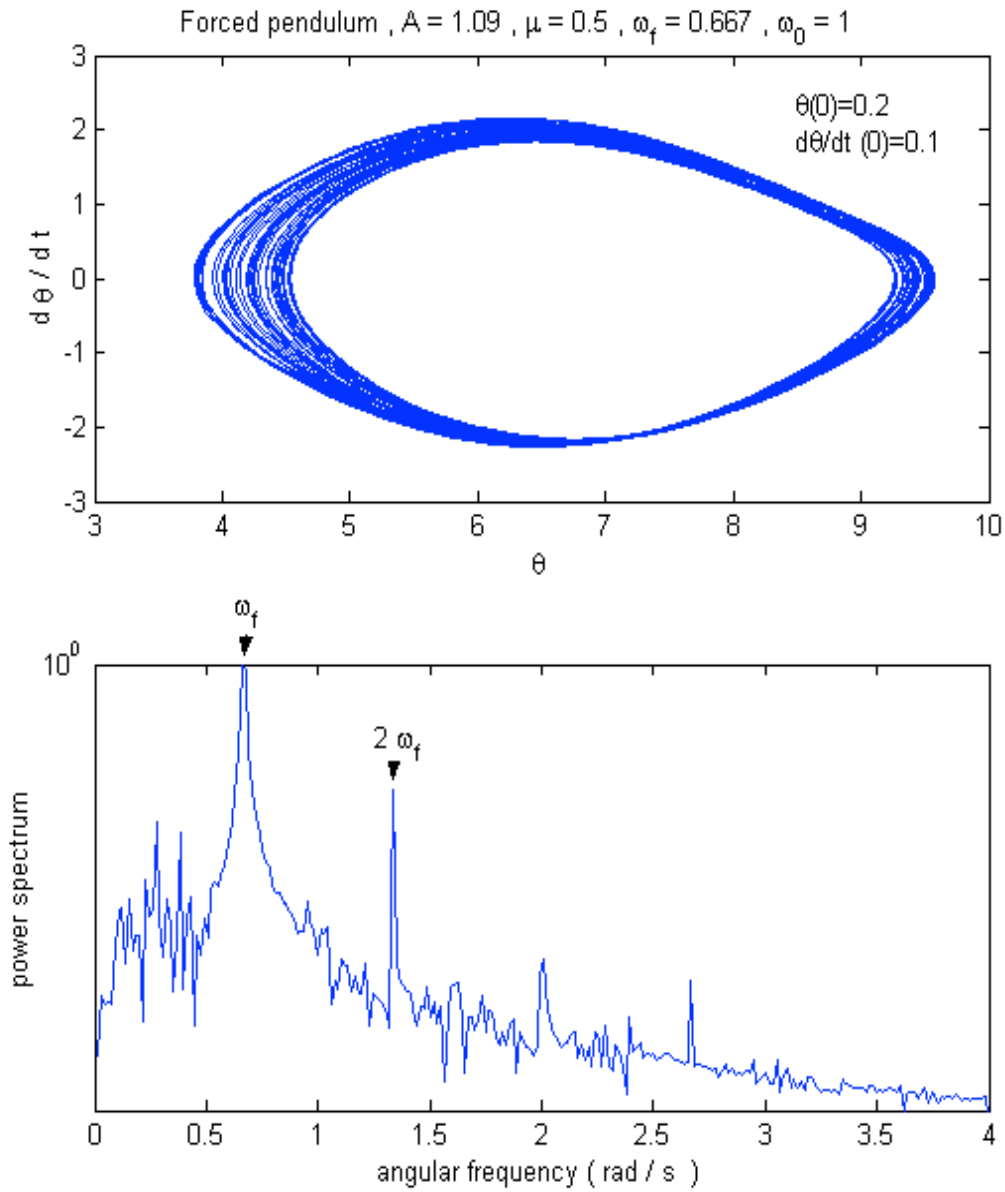
Αν αυξήσουμε το πλάτος λίγο ακόμα έχουμε και νέο διπλασμό της περιόδου.  
Ο οριακός κύκλος και η αντιστοιχούσα φασματική ισχύς για  $A = 1.083$  φαίνεται στο σχήμα:



Για αυτό το πλάτος διέγερσης υπάρχει και άλλος ελκυστής στον οποίο μπορεί κανείς να καταλήξει με αρχικές συνθήκες π.χ.  $\theta(0) = 0.1$  και  $\dot{\theta}(0) = 0$ :



Αν αυξήσουμε το πλάτος ακόμα περισσότερο εμφανίζονται όλο και περισσότερες υποδιπλάσιες συχνότητες. Όταν όμως ξεπεράσουμε τη τιμή  $A = 1.09$  ο χαρακτήρας της κίνησης αλλάζει, και η κίνηση φαίνεται να γίνεται απεριοδική.



Παρατηρείτε ότι το φάσμα έχει γεμίσει. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν αυξήσουμε το πλάτος ακόμη περισσότερο:

