

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Λύσεις της εξέτασης του Ιουνίου 2006

Άσκηση 1

(i) Μελετάμε την απεικόνιση: $x_{n+1} = ax_n + x_n^3$ ως προς τα σταθερά της σημεία. Μετά από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε τα σταθερά σημεία:

$$x_0^* = 0, \quad x_+^* = \sqrt{1-a}, \quad x_-^* = -\sqrt{1-a}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε την ευστάθεια των σημείων αυτών μέσω της παραγώγου $\frac{dx_{n+1}}{dx_n}$ σε αυτά. Τα αποτελέσματα της αντίστοιχης διερεύνησης συνοψίζονται στον κατωτέρω πίνακα:

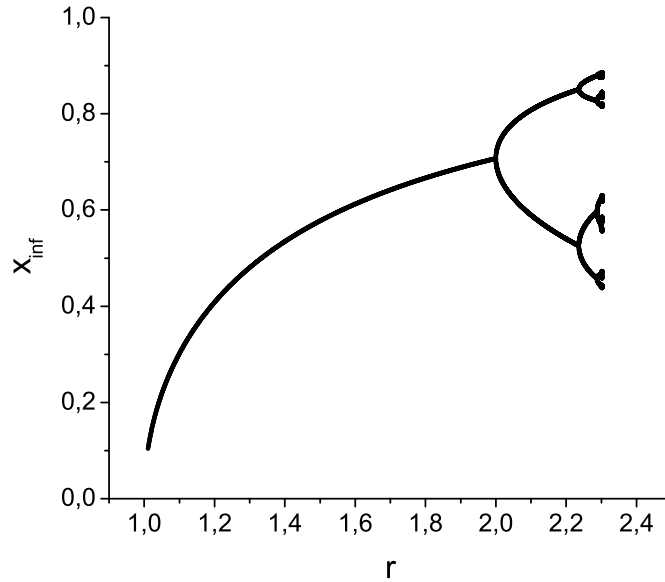
a	x_0^*	x_-^*	x_+^*
$-1 - \epsilon$	ασταθές	ασταθές	ασταθές
$-1 + \epsilon$	ευσταθές	ασταθές	ασταθές
$-\epsilon$	ευσταθές	ασταθές	ασταθές
ϵ	ευσταθές	ευσταθές	ευσταθές
$1 - \epsilon$	ευσταθές	ευσταθές	ευσταθές
$1 + \epsilon$	ασταθές	—	—

Έτσι έχουμε στο $a = -1$ μιά διακλάδωση αντιστροφής (flip bifurcation βλέπε Strogatz σελ. 358) ενώ για $a = 1$ έχουμε υπερκρίσιμη διακλάδωση δικρانيού (supercritical pitchfork bifurcation βλέπε παραδόσεις μαθήματος).

(ii) Το διάγραμμα διακλαδώσεων υπολογίζεται εύκολα με ένα απλό πρόγραμμα FORTRAN77. Ενδεικτικά μέχρι και περίοδο 2^7 και με αρχική συνθήκη $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ το αποτέλεσμα δίνεται στο σχήμα 1. Λόγω της συμμετρίας της απεικόνισης στον μετασχηματισμό $x \rightarrow -x$ το αντίστοιχο διάγραμμα για $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ είναι το καθρεπτικό του σχήματος 1 ως προς τον άξονα r .

Ο αριθμητικός υπολογισμός της σταθεράς Feigenbaum a_F είναι λίγο πιο σύνθετος και απαιτεί την εύρεση των ριζών r_p της εξίσωσης:

$$f^{(p)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, r_p\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \quad (1)$$



για $p = 2^0, 2^1, 2^2, \dots$ όπου $f^{(p)}$ είναι η p -στη επανάληψη της $f(x, r) = rx(1 - x^2)$ και κατόπιν το προσδιορισμό του σημείου του αντίστοιχου p κύκλου $x_{min,p}$ που είναι πλησιέστερο στο $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Τότε το a_F δίνεται από τη σχέση:

$$a_F = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x_{min,p-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{x_{min,p} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (2)$$

Για τον υπολογισμό των ριζών στην (1) μπορεί π.χ. να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος κιβωτισμού χρησιμοποιώντας και την πληροφορία του διαγράμματος διακλαδώσεων για τον καθορισμό των άκρων του διαστήματος στο οποίο αναζητείται η ρίζα.

p	r_p	$x_{min,p} - \frac{1}{\sqrt{3}}$
1	1.5	---
2	2.121320	0.239146
4	2.262990	-0.101689
8	2.293843	0.038737
16	2.300475	-0.015699
32	2.301896	0.006231

Έτσι βρίσκουμε: $a_F \approx -2.52$ τιμή που είναι πολύ κοντά σε αυτήν της λογιστικής απεικόνισης. Αυτό είναι αναμενόμενο από την τάξη του μεγίστου της εν λόγω απεικόνισης. Το μέγιστό της είναι για $x_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το x_{max} παίρνουμε:

$$f(x) = \frac{2r}{3\sqrt{3}} - r\sqrt{3}(x - x_{max})^2 - r(x - x_{max})^3$$

δηλ. το μέγιστο της απεικόνισης είναι δεύτερης τάξης, ακριβώς όπως και στη περίπτωση της λογιστικής. Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία ανακανονικοποίησης του Feigenbaum οι τιμές των αντιστοίχων σταθερών ανακανονικοποίησης δ και a_F θα συμπίπτουν με αυτές της λογιστικής απεικόνισης.

(iii) Εδώ εξετάζουμε απεικόνιση της μορφής:

$$g(x) = b - |x|^z$$

Χωρίς παραβίαση της γενικότητας μπορούμε να θέσουμε $b = 1$. Η απεικόνιση αυτή έχει μέγιστο τάξης z στο $x = 0$. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ανακανονικοποίησης (βλέπε φυλλάδιο υποδείξεων) και συγκρίνοντας μέχρι και όρους χαμηλότερης τάξης ως προς x (δηλ. $O(|x|^z)$) παίρνουμε:

$$|a_F|^z + z(a_F - 1) = 0$$

ως εξίσωση προσδιορισμού του a_F (λύνεται αριθμητικά).

(iv) Η πιο γενική μορφή της ζητούμενης απεικόνισης με την απαίτηση να είναι το πολύ 2ης τάξης ως προς x έχει τη μορφή:

$$f(x, \mu) = f_0 + a_1\mu + b_1x + c\mu x + a_2\mu^2 + b_2x^2$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες:

$$f(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \quad ; \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης καταλήγουμε στη μορφή:

$$f(x, \mu) = \mu(a_1 + a_2\mu) - x(1 + a_1b_2\mu) + b_2x^2 \quad (3)$$

Χωρίς παραβίαση της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ και $b_2 = -1$ οπότε η (3) γράφεται:

$$f(x, \mu) = \mu - x(1 - \mu) - x^2 \quad (4)$$

Για κύκλο περιόδου 2 θα ισχύει:

$$x_2 = \mu - x_1(1 - \mu) - x_1^2 \quad ; \quad x_1 = \mu - x_2(1 - \mu) - x_2^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε: $x_1 + x_2 = \mu$. Έτσι η επίλυση του συστήματος ανάγεται στην επίλυση απλής εξίσωσης δευτέρου βαθμού με λύση: $x_1 = 0$ και $x_2 = \mu$. Η ευστάθεια του κύκλου θα χαρακτηρίζεται από τη παράγωγο στα x_i με $i = 1, 2$: $\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}|_{x=\mu} = 1 - \mu^2$. Παρατηρούμε ότι για $\mu = 0$ η απεικόνιση έχει ένα σταθερό σημείο στο $x^* = 0$ με αδιάφορη ισορροπία $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} = 1$ το οποίο διακλαδώνεται για $\mu > 0$ σε κύκλο περιόδου 2. Η ανωτέρω απεικόνιση λοιπόν παρουσιάζει διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης. Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ το αρχικό σταθερό σημείο $x = 0$ παραμένει ως μέλος του προκύπτοντος κύκλου μετά τη διακλάδωση δηλ. πρόκειται για μιά εκφυλισμένη διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου!

Άσκηση 2

(i) Για $s > 1$ υπάρχει πάντα σταθερό σημείο $z \in (\frac{1}{2}, 1)$ της απεικόνισης με $z = \frac{s}{s+1}$. Επίσης υπάρχει $y \in (0, \frac{1}{2})$ με $T_s(y) = z$. Με λίγη άλγεβρα δείχνει κανείς ότι $y = \frac{1}{s+1}$. Θα δείξουμε τώρα ότι η T_s^2 για $\sqrt{2} < s \leq 2$ έχει πέταλο και επομένως η T_s εμφανίζει τοπολογικό χάος. Εξ ορισμού θα ισχύει: $T_s^2(z) = T_s^2(y) = z$. Επίσης $T_s(\frac{1}{2}) = \frac{s}{2}$ και $T_s^2(\frac{1}{2}) = \frac{s}{2}(2 - s)$. Για να υπάρχει πέταλο αρκεί: $T_s^2(\frac{1}{2}) < y$. Άρα θα πρέπει: $\frac{s}{2}(2 - s) < \frac{1}{s+1}$ που οδηγεί στη συνθήκη: $s^2 > 2$. Βρίσκουμε λοιπόν ότι αν $s^2 > 2$ θα ισχύει:

$$T_s^2(\frac{1}{2}) < y < \frac{1}{2} < z \quad ; \quad z = T_s^2(y) = T_s^2(z)$$

Τώρα είναι εύκολο να δείξει κανείς (με εντελώς ανάλογο τρόπο όπως στη περίπτωση κύκλου 3 για την λογιστική απεικόνιση

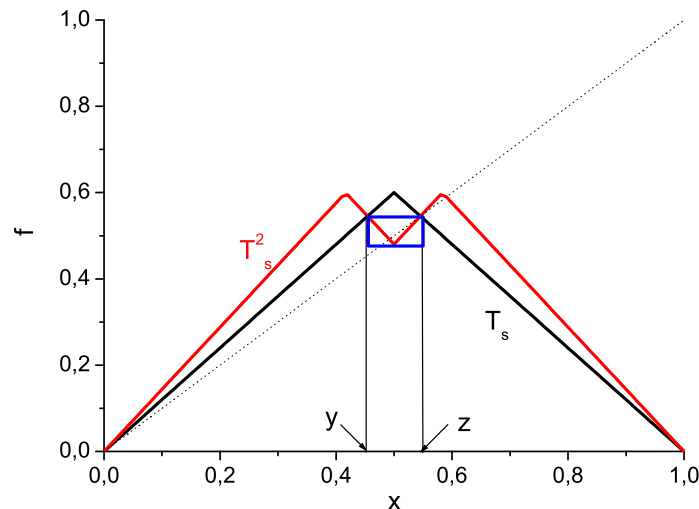
που κάναμε στο μάθημα) την ύπαρξη διαστημάτων $K_1 = [y, r]$ και $K_2 = [t, z]$ με $T_s^2(K_i) = [y, z]$ και $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Μάλιστα λόγω της απλής μορφής της απεικόνισης προσδιορίζονται εύκολα και τα r, t : $r = \frac{s^2+s-1}{s^2(s+1)}$ και $t = \frac{s^3-s+1}{s^2(s+1)}$.

(ii) Μελετάμε τώρα την απεικόνιση για $1 < s \leq \sqrt{2}$. Έστω $w > z$ τέτοιο ώστε $T_s(w) = y = \frac{1}{s+1}$. Το w προσδιορίζεται από:

$$s(1-w) = y = \frac{1}{s+1} \Rightarrow w = \frac{s^2+s-1}{s(s+1)}$$

Τώρα με απλή άλγεβρα μπορεί να δείξει κανείς ότι τα διαστήματα $J_1 = [y, z]$ και $J_2 = [z, w]$ ικανοποιούν τις συνθήκες: $T_s(J_1) = [z, \frac{s}{2}]$ και $T_s(J_2) = [y, z]$. Όμως για να ισχύει $T_s(J_1) \subseteq J_2$ θα πρέπει: $\frac{s}{2} > \frac{s}{s+1} \Rightarrow s > 1$ καθώς και: $\frac{s}{2} \leq w \Rightarrow \sqrt{2} \geq s \geq 1$ συνθήκες που ικανοποιούνται λόγω αρχικής υπόθεσης. Επίσης προφανώς ισχύει $T_s(J_2) \subseteq J_1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι με κατάλληλη βάρμιση η $T_s^2(J_i)$ πηγαίνει στη T_s^2 . Η απόδειξη θα γίνει αναλυτικά για το J_1 και με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορεί να εργαστεί κανείς και για το J_2 . Στην κατανόηση της διαδικασίας βοηθάει το σχήμα 2.



Η τριγωνική κορυφή που περιέχεται στο μπλε χωρίο και αντιστοιχεί στην $T_s^2(J_1)$ μπορεί να γραφτεί με κατάλληλους μετασχη-

ματισμούς με την βοήθεια της T_{s^2} . Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να δώσουμε πρώτα την αναλυτική μορφή της $T_s^2(x)$:

$$T_s^2(x) = \begin{cases} s^2x & x \in [0, \frac{1}{2s}] \\ s(1-sx) & x \in (\frac{1}{2s}, \frac{1}{2}] \\ s(1-s(1-x)) & x \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2s}] \\ s^2(1-x) & x \in (1 - \frac{1}{2s}, 1] \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε τώρα τη συνάρτηση: $G(\xi) = -[T_s^2(\xi) - \frac{s}{s+1}]$ όπου $\xi = x - \frac{1}{2}$ η οποία προκύπτει από μετατόπιση στις διευθύνσεις x και y της T_s^2 κατά $-\frac{1}{2}$ και $-\frac{s}{s+1}$ αντίστοιχα. Μετά από αυτούς τους δύο μετασχηματισμούς η τριγωνική κορυφή του μπλε χωρίου έχει μεταφερθεί έτσι ώστε η x συντεταγμένη της κορυφής να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενώ η y συντεταγμένη είναι αρνητική. Για να επανέλθουμε σε θετικές τιμές πολλαπλασιάζουμε την προκύπτουσα συνάρτηση με -1 και έτσι καταλήγουμε στην $G(\xi)$. Τώρα σύμφωνα με τον ορισμό της T_s^2 το αριστερό ήμισυ της μετασχηματισμένης κορυφής θα έχει τη μορφή:

$$G_L(\xi) = -\left[s(1 - s(\xi + \frac{1}{2})) - \frac{s}{s+1}\right] = s^2 \left(\frac{s-1}{s+1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{\left(\frac{s-1}{s+1}\right)}\right)$$

και το δεξί ήμισυ αντίστοιχα:

$$G_R(\xi) = -\left[s(1 - s(-\xi + \frac{1}{2})) - \frac{s}{s+1}\right] = s^2 \left(\frac{s-1}{s+1}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{\left(\frac{s-1}{s+1}\right)}\right)$$

Προφανώς ισχύει λοιπόν ότι:

$$G(\xi) = \lambda T_{s^2}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

με $\lambda = \frac{s-1}{s+1}$ που αποδεικνύει την ζητούμενη συμμετρία.

(iii) Έχουμε δείξει ότι για $2^{\frac{1}{2}} < s \leq 2$ η T_s^2 έχει πέταλο και επομένως η T_s είναι χαοτική. Τώρα για $1 < s \leq 2^{\frac{1}{2}}$ δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα την ύπαρξη διαστημάτων J_1, J_2 τέτοιων ώστε η $T_s^2|_{J_i}$ να είναι τριγωνική απεικόνιση με κλίση s^2 . Έτσι λοιπόν για $2^{\frac{1}{4}} < s \leq 2^{\frac{1}{2}}$ ισχύει $2^{\frac{1}{2}} < s^2 \leq 2$, η απεικόνιση $T_s^2|_{J_i}$ έχει πέταλο σύμφωνα με το ερώτημα (i) και επομένως η T_s είναι

χαοτική. Έστω τώρα $1 < s^2 \leq 2^{\frac{1}{4}}$ και ας μελετήσουμε την $T_s^2|J_i$. Μετά από βάρθρωση αυτή ισοδυναμεί με τριγωνική απεικόνιση με κλίση s^2 και $1 < s^2 \leq 2^{\frac{1}{2}}$. Για $2^{\frac{1}{4}} < s^2 \leq 2^{\frac{1}{2}}$ η $T_s^2|J_i$ έχει πέταλο και η T_s είναι χαοτική. Το επιχείρημα αυτό μπορεί να συνεχιστεί επαγωγικά για $2^{\frac{1}{2^n}} < s \leq 2$ και να δείξει κανείς τελικά ότι η T_s παρουσιάζει τοπολογικό χάος για $1 < s \leq 2$.

(i) Κατ' αρχάς παρατηρήστε ότι: $A = [\frac{s}{2}(2-s), \frac{s}{2}] = [T_s^2(\frac{1}{2}), T_s(\frac{1}{2})]$. Αρχικά θα δείξουμε ότι: $|T_s(J)| \geq \frac{1}{2}s|J|$ για οποιοδήποτε υποδιάστημα J του A .

Θεωρήστε ένα οποιοδήποτε υποδιάστημα J του $A = [\frac{s}{2}(2-s), \frac{s}{2}]$ και ας συμβολίσουμε με $|J|$ το μήκος του. Εφ' όσον η κλίση της T_s είναι s αν το J δεν περιέχει το ακρότατο $x = \frac{1}{2}$ τότε $|T_s(J)| = s|J|$. Αν όμως το J περιέχει το ακρότατο τότε χωρίζεται σε δύο υποδιαστήματα U και V μέσω του $x = \frac{1}{2}$ και $|T_s(J)| = \max\{|T_s(U)|, |T_s(V)|\}$ όπως μπορεί να δει κανείς εύκολα γραφικά. Τώρα $|U| + |V| = |J|$ οπότε υπάρχει $a \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$|U| = a|J| \quad ; \quad |V| = (1-a)|J|$$

Όμως το ακρότατο δεν είναι εσωτερικό σημείο των U, V οπότε ισχύει:

$$|T_s(U)| = sa|J| \quad ; \quad |T_s(V)| = s(1-a)|J|$$

Τώρα η ελάχιστη δυνατή τιμή του $|T_s(J)| = \max\{|T_s(U)|, |T_s(V)|\}$ επιτυγχάνεται για $|T_s(U)| = |T_s(V)|$ δηλ. αν $a = \frac{1}{2}$. Έτσι λοιπόν ισχύει:

$$|T_s(J)| \geq \frac{1}{2}s|J| \quad (5)$$

Για να συμπληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει n τέτοιο ώστε $\frac{1}{2} \in T_s^n(J)$ και $\frac{1}{2} \in T_s^{n+1}(J)$. Αν αυτό ισχύει τότε $T_s(\frac{1}{2}) \in T_s^{n+1}(J)$ και $\frac{1}{2} \in T_s^{n+1}(J)$ έτσι ώστε $T_s^{n+2}(J) = A$. Αυτό δείχνεται εύκολα αν σκεφτεί κανείς ότι για οποιοδήποτε υποδιάστημα J στο A η ακολουθία $|J|, |T_s(J)|, |T_s^2(J)|, \dots$ είναι αύξουσα εκτός αν $\frac{1}{2} \in T_s^k(J)$ για κάποιο k . Καθώς τα διαδοχικά διαστήματα διαστέλονται κατά παράγοντα s σε κάθε επανάληψη της απεικόνισης και ταυτόχρονα πρέπει να μείνουν υποσύνολα του πεπερασμένου συνόλου A κάποιο τέτοιο k πρέπει να υπάρχει. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\frac{1}{2} \in T_s^k(J)$ αλλά $\frac{1}{2} \notin T_s^{k+1}(J)$ τότε σύμφωνα με την απόδειξη της προηγούμενης παραγράφου (βλέπε σχέση 5) ισχύει ότι: $|T_s^{k+1}(J)| \geq \frac{s}{2}|T_s^k(J)|$ και $|T_s^{k+2}(J)| \geq$

$\frac{s^2}{2}|T_s^{k+1}(J)|$. Όμως εφ' όσον $s > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{s^2}{2} > 1$ και το διάστημα συνεχίζει να διαστέλεται. Για να αποφύγει κανείς τον απειρισμό του αντίστοιχου μήκους πρέπει να υπάρχει n τέτοιο ώστε $\frac{1}{2} \in T_s^n(J)$ και $\frac{1}{2} \in T_s^{n+1}(J)$.