

Μη γραμμική Δυναμική

Παράδοση (αυστηρά) 24 Μαΐου 2011, ώρα 3μμ. Δεν θα γίνει δεκτό τίποτε μετά από αυτή την ώρα.

Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = \mu x - y, \quad \dot{y} = x + \mu y + x^2.$$

Η μ είναι μία σταθερά.

1. Αν οι αρχικές καταστάσεις κάλυπταν ένα χωρίο μοναδιαίου εμβαδού, πόσο θα είναι το εμβαδό του χωρίου αυτού αν εξελιχθεί με τη δυναμική για χρονικό διάστημα t ;
2. Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας και χαρακτηρίστε τα συναρτήσει της παραμέτρου μ .
Θεωρήστε τώρα ότι $\mu > 0$.
3. Ένα από τα σημεία ισορροπίας είναι σαγματικό σημείο. Προσδιορίστε τις διευθύνσεις των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων κοντά στο σημείο ισορροπίας.
4. Με αριθμητική ολοκλήρωση (λαμβάνοντας π.χ. $\mu = 0.1$) αρχίζοντας αρκούντως πλησίον στο σημείο ισορροπίας και στις διευθύνσεις των ασταθών πολλαπλοτήτων προσδιορίστε τις μη γραμμικές επεκτάσεις των πολλαπλοτήτων αυτών (δηλαδή αν αρχίσω στη κατεύθυνση των ασταθών πολλαπλοτήτων που θα πάω).
5. Με αριθμητική ολοκλήρωση, αλλά τώρα πηγαίνοντας πίσω σε αρνητικούς χρόνους, προσδιορίστε τη μη γραμμική επέκταση των ευσταθών πολλαπλοτήτων (δηλαδή προσδιορίστε από που έρχονται οι ευσταθείς πολλαπλότητες).
6. Σχεδιάστε τώρα τη ροή στο χώρο.
7. Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάστε τη ροή όταν είναι $\mu < 0$. Σε τι διαφέρουν οι δύο δυναμικές.
8. Θεωρήστε τώρα τη περίπτωση $\mu = 0$. Δείξτε ότι στη περίπτωση η δυναμική είναι Χαμιλτονιανή.
9. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε σχετικά με το κατά πόσο έχουμε διακλάδωση Hopf;