



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μη Γραμμική Δυναμική

4 Ιουλίου 2014

Παράδοση 7 Ιουλίου 2014

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

## Άσκηση 1

Αποδείξτε πρώτα ότι το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + 3y^2/2) \quad , \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2/2) \quad ,$$

έχει αναγκαστικά περιοδική τροχιά και προσδιορίστε την περιοχή στην οποία αυτή πρέπει να βρίσκεται. (Υπ. μετατρέψτε το σε πολικές συντεταγμένες και κάντε χρήση του Θ. Poincaré-Bendixson.) Έπειτα σχεδιάστε τη ροή κάνοντας χρήση MATLAB.

## Άσκηση 2

Προσδιορίστε τις τιμές του  $k$  για τις οποίες η  $V = x^2 + ky^2$  ορίζει μία συνάρτηση Lyapunov για το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  του δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = -x + y - x^2 - y^2 + xy^2 \quad , \quad \dot{y} = -y + xy - y^2 - x^2y \quad .$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την περιοχή ευστάθειας  $(0, 0)$  όταν  $k = 1$ . Σχεδιάστε με MATLAB το πεδίο ροής και σημειώστε το πεδίο έλξεως του  $(0, 0)$ .

## Άσκηση 3

Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα στο πραγματικό επίπεδο με τη κατάσταση  $x = [x_1, x_2]^T$  να εξελίσσεται με την δυναμική:

$$\dot{x} = Ax - \|x\|^2 x \quad ,$$

όπου  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$  είναι το τετράγωνο του μέτρου της κατάστασης  $x$  και  $A$  ένας πραγματικός πίνακας που έχει μιγαδικές ιδιοτιμές:  $\alpha \pm i\beta$  με  $\beta > 0$ . Κάνοντας χρήση της απόκλισης του πεδίου ροής και του θεωρήματος Poincaré-Bendixson δείξτε ότι πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία περιοδική τροχιά όταν το  $\alpha > 0$  και καμία περιοδική τροχιά όταν  $\alpha < 0$ .