

Μη γραμμική Δυναμική

Παράδοση (αυστηρά) Τρίτη 18 Μαΐου 2010, ώρα 3μμ. Δεν θα γίνει δεκτό τίποτε μετά από αυτή την ώρα.

1. Για το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ με

$$A = \begin{pmatrix} -1 & R \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

προσδιορίστε μία συνάρτηση Lyapunov τετραγωνικής μορφής

$$\Lambda = x^\dagger Cx$$

όπου ο C είναι συμμετρικός θετικός πίνακας, για να αποδείξετε την ευστάθεια Lyapunov και την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του δυναμικού συστήματος. Επιλέξτε για τον πίνακα C αυτόν που αντιστοιχεί στη λύση της εξίσωσης Lyapunov

$$A^\dagger C + CA = -I$$

όπου ο I είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Για αυτή την επιλογή, δείξτε ότι

$$\frac{d\Lambda}{dt} < 0$$

για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι πράγματι ο πίνακας C είναι θετικός, και έτσι πράγματι είναι συνάρτηση Lyapunov. Προσδιορίστε τώρα για $R \gg 1$ προσεγγιστικά τις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 του πίνακα C και τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις. Προσδιορίστε τη στροφή των αξόνων έτσι ώστε η συνάρτηση Lyapunov να λάβει την μορφή

$$\Lambda = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2,$$

όπου y_i οι συντεταγμένες στο στραμμένο σύστημα αξόνων. Σχεδιάστε τις ισοϋψείς της συνάρτησης Lyapunov στο αρχικό σύστημα αξόνων.

2. Προσδιορίστε την αναλυτική λύση του ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + x = \delta \cos t$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Συγκρίνατε την αναλυτική λύση με αυτή που προκύπτει από αριθμητική ολοκλήρωση για $\delta = 0.1$ στο διάστημα $[0, 20]$.