



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα
17 Μαΐου 2017

1 Θεωρήστε ότι ανά μονάδα χρόνου η κατάσταση του δυναμικού συστήματος προωθείται μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Σχεδιάστε πως μετασχηματίζονται οι αρχικές συνθήκες που εμπεριέχονται σε τετράγωνο με κορυφές τις $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ και προσδιορίστε το εμβαδόν του μετασχηματισμένου χωρίου. Επίσης προσδιορίστε τον εκθέτη Lyapunov του δυναμικού συστήματος.

2 Η απεικόνιση Poincare δυναμικού συστήματος οδηγεί στον εξής αναδρομικό νόμο εξέλιξης: $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$. Προσδιορίστε την ευστάθεια των σταθερών σημείων και τα $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ όταν $x_1 = 0.1$, $x_1 = 0.8$, $x_1 = 1.1$.

4 Ο ταλαντωτής του Rayleigh $\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^3 - \dot{x}) + x = 0$ για $0 < \varepsilon \ll 1$ εκτελεί τελικά περιοδική κίνηση. Τι περίοδο αναμένετε να έχει η περιοδική κίνηση; Με ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε το πλάτος της ταλάντωσης.

6 Η ροή του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = y - \mu x$, $\dot{y} = -x$ κοντά στο σημείο ισορροπίας εξαρτάται από το μ . Σχεδιάστε τις δυνατές ροές που μπορεί να προκύψουν.

7 Προσδιορίστε συναρτήσει του μ την τελική συμπεριφορά του ταλαντωτή $\dot{x} = 10^6(y - f(x))$, $\dot{y} = -x/10^6$ με $f(x) = 2x + \mu - 2$ όταν $x > 1$, $f(x) = \mu x$ όταν $|x| \leq 1$ και $f(x) = 2x - \mu + 2$ όταν $x < -1$.