Αριθμητική ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης

23 Μαΐου 2014

Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για να ολοκληρώσετε αριθμητικά την λογιστική εξίσωση με χρονοεξαρτώμενη αλίευση:

$$\dot{x} = x(1-x) - a\left[1 + \epsilon \sin(2\pi t)\right] \ . \tag{1}$$

1. Κατασκευάστε μια συνάρτηση `flogi` που να σας δίνει το $\dot{x}$. Θα πρέπει να δέχετε παραμέτρους το x, t και a. Το ϵ θα το ορίσεται μέσα στη συνάρτηση. Θα παίρνει τις τιμές 0 ή 1 για να ρυθμίζετε αν θα έχει ή όχι χρονοεξάρτηση η αλίευση.

2. Βεβαιωθείτε ότι η συνάρτηση δουλεύει σχεδιάζοντας το $\dot{x}$ σαν συνάρτηση του x με $a = t = \epsilon = 0$. Παίρνετε τη γνωστή παραβολή; Σχεδιάστε τώρα το $\dot{x}$ σαν συνάρτηση του t για $x = 0$, $a = \epsilon = 1$. Παίρνετε το ημίτονο με περίοδο 1 που ταλαντώνεται γύρω από την τιμή $\dot{x} = 1$;

3. Αρχίστε χωρίς χρονοεξάρτηση ($\epsilon = 0$). Αρχίστε με $x(0) = 0.1$ και ολοκληρώστε με τη μέθοδο Runge-Kutta (βλ. Άσκηση 1) μέχρι χρόνο $t_f = 40$. Για $a = 0$ ξέρουμε ότι η λύση πρέπει να καταλήξει στο $x = 1$. Μάλιστα αν $x(0) < 1/2$ τότε θα έχει τη σιγμοειδή μορφή που συζητούσαμε στην τάξη; Το πετυχαίνεται αυτό; (Για αυτή την περίπτωση υπάρχει και αναλυτική λύση με την οποία θα μπορούσατε να συγκρίνεται τα αποτελέσματά σας.)

4. Βάλτε τώρα λίγη χρονοανεξάρτητη αλίευση, $a = 0.1$ (με $\epsilon = 0$). Τα δύο νέα σημεία ισορροπίας είναι τα $x_1 = 1/2 - \sqrt{1/4 - a}$, $x_2 = 1/2 + \sqrt{1/4 - a}$, εκ των οποίων το πρώτο είναι ασταθές και το δεύτερο ευσταθές. Ολοκληρώστε πάλι μέχρι $t_f = 40$ και επιβεβαιώστε ότι αν αρχίσετε με $x_1 < x(0)$ τότε η λύση πλησιάζει ασυμπτωτικά στο $x = x_2$. Μπορείτε να σχεδιάζετε την ευθεία $x = x_2$ μαζί με την τροχιά που υπολογίζετε για να δείτε πόσο την πλησιάζει. Αυτό γίνεται για παράδειγμα ως:

   ```
   figure(1)
   plot(t,x) % η τροχια
   x1 = 1/2 - sqrt(1/4-alpha); x2 = 1/2 + sqrt(1/4-alpha);
   hold on;plot([0 tf],[x2 x2]);hold off;
   % χρησιμοποιούμε hold on για να μην σβήσει τα προηγούμενα
   ```

   Αν αρχίσετε με $x(0) < x_1$ πού πάει η λύση; (απ. πάει στο $x \to -\infty$)

5. Δεδομένου ότι αυτή η εξίσωση περιγράφει πληθυσμούς δεν έχει νόημα για $x < 0$. Προσθέστε μετά το βήμα της RK μια γραμμή η οποία να ελέγχει αν η νέα τιμή για το x που υπολόγισε είναι αρνητική. Σε τέτοια περίπτωση τότε να την θέτει ίση με μηδέν. Π.χ.:

```
x(it) = x(it-1) + ... ; %το βήμα της RK
if x(it)<0
    x(it)=0;
end
```

6. Επαναλάβετε το πείραμα με $a = 0.1$, $\epsilon = 0$ και $x(0) < x_1$. Η λύση πηγαίνει πάλι στο $-\infty$;

7. Στο μάθημα δείξαμε ότι για $a \geq 1/4$ δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας και ότι όλα τα ψάρια θα πεθάνουν. Το επιβεβαιώνουν αυτό οι αριθμητικές σας ολοκληρώσεις;

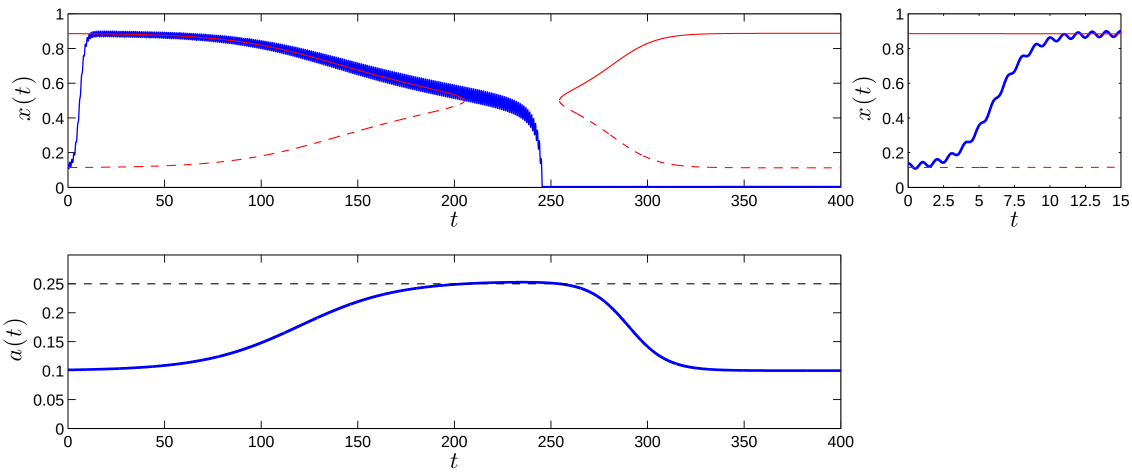
8. Βάλτε τώρα στο πρόβλημα χρονοεξάρτηση, $\epsilon = 1$ και $a = 0.1$; Τι γίνεται όταν αρχίζεται με $x(0) < x_1$ και τι γίνεται όταν $x(0) > x_1$. Πηγαίνει η λύση πάλι στο $x = x_2$; Τι συμπεράσματα βγάζεται;

9. Τι γίνεται καθώς αρχίζετε να αυξάνετε το ρυθμό αλίευσης a. Υπάρχει και πάλι μια κρίσιμη τιμή του a για την οποία όλα τα ψάρια πεθαίνουν ανεξάρτητα από το $x(0)$;

10. (**προαιρετικό**)

    Αρχίστε από μια υποκρίσιμη τιμή του a και $\epsilon = 1$. Ενώ γίνεται η ολοκλήρωση αρχίστε να αυξάνετε το ρυθμό αλίευσης με πολύ αργο ρυθμό (πολύ πιο αργό από τον χαρακτηριστικό χρόνο της ταλάντωσης που γίνεται με περίοδο $T = 1$). Αν το a μεταβάλλεται αρκούντως αργά, τότε η λύση θα προλαβαίνει να 'προσαρμοστεί' στον εκάστοτε ρυθμό αλίευσης. Τι γίνεται όταν ξεπεράσετε την κρίσιμη τιμή του ρυθμού αλίευσης; Εάν τώρα μειώσετε και πάλι την αλίευση κάτω από την κρίσιμη ο πληθυσμός των ψαριών ξαναεπανέρχεται; (Σας θυμίζει αυτό κάτι από τον Η/Μ;)

    (βλ. Σχήμα 1)



Σχήμα 1: (a) Η λύση $x(t)$ για $\epsilon = 1$ με $x(0) = 0.137$ και με ρυθμό αλίευσης $a(t)$ ο οποίος φαίνεται στο (c). Η λύση $x(t)$ ταλαντώνεται με περίοδο $T = 1$. Διακρίνονται επίσης τα σημεία x_1, x_2 που αντιστοιχούν στον στιγμιαίο ρυθμό αλίευσης (με συνεχή γραμμή το x_2 που είναι ευσταθές και με διάστικτη το ασταθές x_1). Αρχικά η λύση αρχικά αποθείται από την περιοχή του ασταθούς σημείου x_1 και ταλαντώνεται γύρω από το $x = x_2$. (b) Τμήμα της λύσης $x(t)$ που φαίνεται στο (a) για $0 < t < 15$. (c) Ο ρυθμός αλίευσης $a(t)$ που χρησιμοποιήθηκε για το (a). Αρχικά $a(0) = 1/10 < 1/4$. Στο σχήμα φαίνεται επίσης σημειωμένη η κρίσιμη τιμή $a = 1/4$.