

A. Δίδεται το δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= 1 - x^2 - y^2\end{aligned}$$

1. Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας
2. Ποιές οι τιμές του δείκτη των σημείων ισορροπίας
3. Σχεδιάστε που θα μπορούσε να υπάρχει οριακός κύκλος
4. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου με τον χρόνο. Μπορείτε να αποκλείσετε την υπέρξη οριακού κύκλου από ορισμένες περιοχές τώρα.
5. Σχεδιάστε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης (nullclines). Μπορείτε να αποκλείσετε τώρα την υπέρξη οριακού κύκλου;
6. Γράψτε την γραμμική δυναμική στη περιοχή του καθενός από τα σημεία ισορροπίας.
7. Σχεδιάστε τη δυναμική στη περιοχή κάθε σημείου ισορροπίας
8. Σχεδιάστε τη δυναμική σε όλο το χώρο, σημειώνοντας με έμφαση τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες.
9. Αν αρχικά βρισκόμουν στη κατάσταση  $(1,0)$  που θα καταλήξω;

B. Δίδεται διαδότης μίας περιόδου (η περίοδος είναι  $T = 1$ )

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Να σχεδιασθεί η χρονική εξέλιξη κατά μία περίοδο των καταστάσεων που βρίσκονται εντός του τετραγώνου  $A$  με κορυφές τις  $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ .
2. Ποίος ο λόγος της επιφάνειας του σχήματος  $\Phi(A)$  ως προς αυτή του  $A$ .
3. Είναι η δυναμική ευσταθής; Ποίος ο χαρακτηριστικός εκθέτης Lyapunov.

Γ. Δίδεται ο διαταραγμένος αρμονικός ταλαντωτής :

$$\ddot{x} + (1 + \epsilon)x = 0 ,$$

με αρχικές συνθήκες  $x(0) = 1$   $\dot{x}(0) = 0$ , όπου  $\epsilon$  μικρή παράμετρος. Θέλουμε να βρούμε τη λύση  $x(t, \epsilon)$ .

1. Προσδιορίστε την ακριβή λύση  $x(t, \epsilon)$ .
2. Θέλουμε τώρα να προσεγγίσουμε την λύση ακολουθώντας κανονική διαταρακτική μέθοδο γράφοντας:  $x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots$ . Προσδιορίστε τις συναρτήσεις  $x_0(t)$  και  $x_1(t)$  και με το τρόπο αυτό την πρώτη τάξης προσέγγιση. Για πόσο χρόνο η προσέγγιση αυτή είναι χρήσιμη.
3. Προχωρήστε τώρα για να προσεγγίσετε τη λύση με τη μέθοδο των μέσων τιμών του Bogoliubov (γράψτε το δυναμικό σύστημα σε πολικές συντεταγμένες και προσδιορίστε το μέσο σύστημα).
4. Συγκρίνατε τη λύση που προσδιορίσατε με την ακριβή λύση. Αν  $\epsilon = 0.01$  για πόσο χρόνο είναι η προσεγγιστική λύση ακριβής και όταν δεν είναι ποία η φύση του λάθους.