



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

1 Ιουνίου 2012

A. Υπολογίστε διαταρακτικά την πρώτης τάξης διόρθωση στη ρίζα 1 του τριωνύμου $x^2 + \epsilon x - 1 = 0$ για $|\epsilon| \ll 1$. **(5 μόρια)**

B. Για το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = x - xy \quad , \quad \dot{y} = -y + x^2 \quad ,$$

1. Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους. **(5 μόρια)**
2. Προσδιορίστε την ευσταθή πολλαπλότητα της αρχής των αξόνων. **(10 μόρια)**
3. Προσδιορίστε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης και σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο επι αυτών. **(10 μόρια)**
4. Προσδιορίστε την περιοχή στην οποία η επιφάνεια του χωρίου κάποιας αρχικής αβεβαιότητας συρρικνώνεται. **(10 μόρια)**
5. Σχεδιάστε πλήρως το διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από αυτό το δυναμικό σύστημα. **(5 μόρια)**

Γ. Για το περιοδικό γραμμικό δυναμικό σύστημα $\dot{x} = A(t)x$ με

$$A(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos^2 t - 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ποία η περίοδος T του παραπάνω συστήματος; **(5 μόρια)**
2. Περιγράφεται ο διαδότης από τον τύπο $\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t A(t)dt\right)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **(5 μόρια)**
3. Τι φυσικό μέγεθος περιγράφει η $\det(\Phi(t))$; Γράψτε τη διαφορική εξίσωση εξέλιξης της $\det(\Phi(t))$. σε αυτό το δυναμικό σύστημα και υπολογίστε την ορίζουσα της απεικόνισης μίας περιόδου $\det(\Phi(T))$. **(10 μόρια)**
4. Προσδιορίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που διέπει τις ιδιοτιμές μίας περιόδου του $\Phi(T)$ συναρτήσει του $\det(\Phi(T))$ και του ίχνους $\text{trace}(\Phi(T))$. Μην υπολογίσετε το ίχνος του διαδότη. **(10 μόρια)**

5. Προσδιορίστε τον δεύτερο εκθέτη Lyapunov αν γνωρίζουμε ότι ο ένας εκθέτης είναι μηδενικός. **(5 μόρια)**
6. Προσδιορίστε μια μη τετριμμένη (όχι την $r=0$) περιοδική τροχιά γ του δυναμικού συστήματος που σε πολικές συντεταγμένες εξελίσσεται σύμφωνα με:
- $$\dot{r} = (r - r^2)(r - 4 \cos^2 \theta) \quad , \quad \dot{\theta} = r \quad . \quad \mathbf{(10 \text{ μόρια})}$$
7. Προσδότε το γραμμικό δυναμικό σύστημα που διέπει την ευστάθεια της γ και ελέγξτε με τη βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων τελικά την ευστάθεια της γ . **(10 μόρια)**

Δ. Για το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = \mu \left(y - \left(-x + \beta x^5 / 5 \right) \right) \quad , \quad \dot{y} = -x / \mu \quad ,$$

1. Θεωρήστε πρώτα $\mu \gg 1$. Δείξτε ότι για $\beta > 0$ υπάρχει οριακός κύκλος και σχεδιάστε τον κατασκευάζοντας τις καμπύλες μηδενικής κλίσης και παρατηρώντας τον τρόπο κίνησης του συστήματος μακριά και κοντά σε αυτές. **(10 μόρια)**
2. Πάλι για $\mu \gg 1$. Προσδιορίστε τη δυναμική εξέλιξη για $\beta < 0$, όπου τότε δεν υπάρχει οριακός κύκλος. **(5 μόρια)**
3. Προσδιορίστε την εξίσωση του ταλαντωτή που διέπει την απομάκρυνση x . Ποια η κίνηση του x για $\mu = 0$; (Συνδυάστε τις 2 εξισώσεις σε 1 δεύτερης τάξης προτού θέσετε $\mu = 0$). **(5 μόρια)**
4. Θεωρούμε τώρα ότι $\mu \ll 1$. Κάνοντας χρήση ενεργειακών επιχειρημάτων ή προσδιορίστε το πλάτος της ταλάντωσης που θα καταλήξει να εκτελεί ο ταλαντωτής αυτός. **(10 μόρια)**

Σύνολο 130 μόρια. Καλή επιτυχία.