

Συνεχής εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες – Χρονική ισχύς λύσεων

Μία σημαντική ιδιότητα των δυναμικών συστημάτων είναι η συνεχής εξάρτηση των λύσεων τους από τις αρχικές συνθήκες καθώς επίσης και από τυχόν παραμέτρους που υπεισέρχονται στη δυναμική. Έστω το δυναμικό σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

όπου x και f είναι στο R^n . Το δυναμικό σύστημα για κάθε αρχικό χρόνο t_0 και κάθε αρχική τιμή $x(t_0) = x_0$ έχει μοναδική λύση στο ανοικτό διάστημα $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$, για κάποιο τ . Η ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων για κάποιο χρονικό διάστημα ισχύει όταν η f είναι συνεχής με συνεχής μερικές παραγώγους, αλλά τελικά αρκεί η συνάρτηση f να ικανοποιεί τη συνθήκη Lipshitz, δηλαδή σε κάθε ανοικτό διάστημα να υπάρχει κάποια σταθερά L , έτσι ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|,$$

για κάθε x, y στο ανοικτό διάστημα. Η συνθήκη αυτή διαβεβαιώνει ότι η συνάρτηση δεν μεταβάλλεται απέραντα, και η συνθήκη αυτή ικανοποιείται στα περισσότερα φυσικά προβλήματα. Είναι προφανές ότι αν μία συνάρτηση έχει περατωμένες μερικές παραγώγους θα είναι Lipshitz. Προσέξτε ότι δεν έχουμε διαβεβαιώσει ακόμη ότι το δυναμικό σύστημα θα έχει λύση για όλους τους χρόνους (που πρέπει να ισχύει για φυσικά φαινόμενα τα οποία είναι ορθά διατυπωμένα και εμπεριέχουν όλες τις φυσικές διαδικασίες).

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν η f είναι Lipshitz τότε με σταθερά L τότε δύο λύσεις του δυναμικού συστήματος $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με διαφορετικές αρχικές τιμές $x_1(t_0)$ και $x_2(t_0)$ ικανοποιούν την ανισότητα:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| e^{L(t-t_0)}.$$

Η ανισότητα αυτή αποδεικνύει ότι η διαφορά μεταξύ λύσεων του δυναμικού συστήματος έχει το πολύ εκθετική αύξηση και επίσης ότι η λύση εξαρτάται συνεχώς από τις αρχικές συνθήκες. Το αυτό μπορεί να αποδειχθεί για την εξάρτηση των λύσεων από μία παράμετρο ε , αν το δυναμικό σύστημα εξαρτάται από αυτή, δηλαδή είναι $f(x, \varepsilon)$.

Απόδειξη

Το δυναμικό σύστημα έχει τη λύση:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds,$$

οπότε από δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες θα ισχύει διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &= \left| x_1(t_0) - x_2(t_0) + \int_{t_0}^t (f(x_1(s)) - f(x_2(s))) ds \right| \\ &\leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(x_1(s)) - f(x_2(s))| ds \end{aligned}$$

$$\leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + L \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds$$

Αν δηλαδή ορίσω την απόσταση μεταξύ των λύσεων $\delta(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ επειδή η f είναι Lipschitz θα ισχύει:

$$\delta(t) \leq \delta(t_0) + L \int_{t_0}^t \delta(s) ds.$$

Η ανισότητα αυτή όμως συνεπάγεται την ανισότητα (όπως και θα αναμέναμε):

$$\delta(t) \leq \delta(t_0) e^{L(t-t_0)}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι ειδική περίπτωση της πολύ χρήσιμης ανισότητας του Gronwall και αποδεικνύει τη συνέχεια των λύσεων στις αρχικές συνθήκες.

Ας αποδείξουμε αυτή την ειδική περίπτωση της ανισότητας του Gronwall.

Ορίζουμε $g(t) = \delta(t_0) + L \int_{t_0}^t \delta(s) ds$. Τότε κάνοντας χρήση της υπόθεσης θα είναι

$$\frac{dg}{dt} = L\delta(t) \leq Lg.$$

Πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα με τον θετικό αριθμό: e^{-Lt} έχουμε:

$$\frac{dg}{dt} e^{-Lt} \leq Lg e^{-Lt} \quad \text{ή} \quad \frac{d(ge^{-Lt})}{dt} + Lge^{-Lt} \leq Lge^{-Lt} \quad \text{ή} \quad \frac{d(ge^{-Lt})}{dt} \leq 0$$

και ολοκληρώνοντας αποδεικνύουμε ότι:

$$g(t)e^{-Lt} \leq g(t_0)e^{-Lt_0} \quad \text{ή} \quad g(t) \leq g(t_0)e^{-L(t-t_0)}$$

η οποία είναι η ζητούμενη ανισότητα διότι εξ ορισμού $\delta(t) \leq g(t)$ και $g(t_0) = \delta(t_0)$.

Άσκηση: (Ανισότητα του Gronwall) Αν $C \geq 0$ και f, g συνεχείς και μη αρνητικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0, \infty)$ και είναι:

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(s)f(s)ds,$$

τότε θα ικανοποιείται η ανισότητα:

$$f(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

Έχουμε ήδη συζητήσει ότι το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ δεν έχει αναγκαστικά λύση για όλους τους χρόνους. Παράδειγμα είναι το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = 1 + x^2$ που έχει ως λύση την $x = \tan(t - t_0)$, όπου t_0 μία σταθερά.

Η λύση αυτή υπάρχει μόνο για το πεπερασμένο διάστημα: $t_0 - \frac{\pi}{2} < t < t_0 + \frac{\pi}{2}$

δεδομένου ότι $x(t) \rightarrow \pm\infty$ όταν $t \rightarrow t_0 \pm \frac{\pi}{2}$.

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους. Θα δείξουμε ότι αν οι λύσεις του δυναμικού συστήματος για $t > 0$ βρίσκονται αναγκαστικά μέσα σε κάποιο χωρίο τότε η λύση υπάρχει για όλους του θετικούς χρόνους. Αν λύση υπήρχε μόνο μέχρι το χρόνο t_0 και όχι τότε η τροχιά θα κατέληγε σε κάποιο σημείο του χωρίου x_0 . Αλλά έχουμε δείξει ότι το δυναμικό σύστημα με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$ έχει μοναδική λύση σε κάποιο διάστημα $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ για κάποιο τ , όπερ άτοπο. Άρα η λύση υπάρχει επ'άπειρο. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όταν η λύση έχει περιορισμένη χρονικά ισχύ θα πρέπει αναγκαστικά $|x(t)| \rightarrow \infty$.

Άσκηση: Θεωρήστε το παράδειγμα που συζητήσαμε: $\dot{x} = x(3 - x - 2y)$, $\dot{y} = y(2 - x - y)$ με $x, y \geq 0$ Αποδείξτε ότι λύση υπάρχει για όλους του θετικούς χρόνους.