ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Διαγώνισμα στα Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

28 Μαρτίου 2018

Φ.Α.Ι.

Απαντήστε στις ερωτήσεις με προσοχή, συντομία και ακρίβεια. Σύνολο μορίων 120.

1. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα (δσ):
$$\dot{x} = y \ , \ \ \dot{y} = -2x - 3y \ .$$
α) Σχεδιάστε τη ροή γύρω από το σημείο ισορροπίας, χαρακτηρίστε τη σταθερότητά του και σημειώστε τις αναλλοίωτες διευθύνσεις του. **[5]**
β) Ποιά αρχική συνθήκη μοναδιαίου Ευκλείδειου μέτρου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στο δσ για να διεγείρουμε περισσότερο τη λιγότερο ευσταθή ιδιοκατάσταση; Πόση είναι η βέλτιστη αυτή διέγερση της εν λόγω ιδιοκατάστασης; **[5]**
γ) Ένα τετραγωνικό χωρίο μοναδιαίου εμβαδού εξελίσσεται σύμφωνα με το παραπάνω δσ. Ποιό θα είναι το εμβαδόν του μετά από μία μονάδα του χρόνου; **[5]**

2. Σχεδιάστε τη ροή στο επίπεδο (x, y) του δσ που έχει την πολική μορφή:
$$\dot{r} = r - r^3 \ , \ \ \dot{\theta} = 1 \ ,$$
όπου $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$. **[10]**

3. Θεωρήστε τον ταλαντωτή
$$\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \ , \text{με} \ \ \varepsilon << 1 \ .$$
α) Χρησιμοποιώντας ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε τον οριακό κύκλο αυτού. Τι περίοδο θα έχει η περιοδική κίνηση; [$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta \ d\theta = \pi/4$, $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \ d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4\theta \ d\theta = 3\pi/4$.] **[10]**
β) Γράψτε τον 2×2 πίνακα $A(t)$ που διέπει την εξέλιξη μικρών διαταραχών του οριακού κύκλου στο χώρο των φάσεων $(x, \dot{x})$. **[10]**

4. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα (δσ):
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \ , \ \ \text{με} \ \ \Phi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$
Αυτό θα μπορούσε να περιγράφει τις διαδοχικές καταστάσεις μιας περιόδου της απεικόνισης Poincarè, ή το διαδότη μιας μονάδας χρόνου ενός συνεχούς δσ.
α) Σχεδιάστε το σχήμα που προκύπτει όταν τα σημεία του τετραγωνικού χωρίου $\mathcal{D}$ με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ μετασχηματίζονται μέσω της Φ. **[5]**
β) Πόσο είναι το εμβαδόν του $\Phi(\mathcal{D})$. Πόσο είναι το εμβαδόν του $\mathcal{D}$ μετά από άπειρες απεικονίσεις του χωρίου, δηλαδή πόσο είναι το εμβαδόν του $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mathcal{D})$; **[5]**
γ) Προσδιορίστε δύο καταστάσεις ψ_1 και ψ_2 που παραμένουν αναλλοίωτες στον μετασχηματισμό Φ. **[5]**
δ) Προσδιορίστε το $\Phi^n\psi$ με $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ και α, β πραγματικούς αριθμούς. **[10]**
ε) Σε τι σχήμα καταλήγει το $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mathcal{D})$; **[5]**

5. Θεωρήστε τις ημι-διακριτές εξισώσεις:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = \frac{1}{h^2}\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right), \quad i\frac{du_n}{dt} = \frac{1}{h^2}\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right),$$

με $h > 0$ και $u_n(t = 0) = f_n$, με $f_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Για τις εξισώσεις αυτές να βρεθούν:

(α) Η σχέση διασποράς. [Υποδ.: Χρησιμοποιήστε λύσεις $u_n(t) \propto Z^n \exp(-i\omega t)$, με $Z = \exp(ikh)$.] **[15]**

(β) Το όριο των παραπάνω εξισώσεων και των σχέσεων διασποράς τους, όταν $h \to 0$ και $n \to \infty$, με το nh να παραμένει πεπερασμένο. **[5]**

6. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση Hopf:

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R},$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ δίνεται ως:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -x, & x \in [0, 1), \\ -1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Να βρείτε το χρόνο θραύσης t_B για το σύστημα αυτό και να σχεδιάσετε στιγμιότυπα της $u(x, t)$ για χρόνους $t \leq t_B$. **[25]**

7. (**Εργασία για το σπίτι να παραδοθεί αύριο ως το μεσημέρι.**) Ένα σημαντικό αναλωτικό φαινόμενο στις μη γραμμικές οπτικές ίνες είναι η εξαναγκασμένη σκέδαση Raman, που διαταράσσει μέσω της παραμέτρου α τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger ως εξής:

$$iu_x - \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = \alpha u(|u|^2)_t \quad , \quad \alpha \geq 0$$

Θέλουμε να διερευνήσουμε την ύπαρξη λύσεων της μορφής $u(x,t) = f(t)\exp(ikx)$, με $k > 0$ και $f(t) \geq 0$ πραγματικό και θετικό.
α) Γράψτε την εξίσωση που διέπει την $f(t)$.
β) Ορίστε καταλλήλως την κινητική και δυναμική ενέργεια ενός νοητού σωματιδίου που βρίσκεται στη θέση f και έχει ταχύτητα $\dot{f}$ και ικανοποιεί την δυναμική του (α) έτσι ώστε η εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της ενέργειας του παράπανω συστήματος να είναι

$$\frac{dE}{dt} = -2\alpha f^2 \dot{f}^2 \ .$$

γ) Για την περίπτωση $\alpha = 0$ σχεδιάστε στο χώρο φάσεων $(f, \dot{f})$ τις τροχιές του συστήματος.
δ) Τι συμβαίνει στις τροχιές αυτές όταν $\alpha > 0$; Κάντε το γράφημα της $f(t)$ συναρτήσει του χρόνου t.
ε) Για $\alpha > 0$ προσδιορίστε τα δύο σημεία ισορροπίας του (α) και προσδιορίστε την ευστάθεια τους στη γραμμική προσέγγιση. Σε ποιά από τα σημεία ισορροπίας η γραμμική προσέγγιση ισχύει όταν συμπεριληφθούν και οι μη γραμμικοί όροι;
στ) Σχεδιάστε τις τροχιές του μη γραμμικού συστήματος (α) στο χώρο φάσεων $(f, \dot{f})$ πολύ πλησίον των σημείων ισορροπίας. Εξηγήστε το σκεπτικό των γραφημάτων σας.
ζ) Σχεδιάστε την τροχιά που αρχίζει πολύ κοντά στο σημείο ισορροπίας. Που καταλήγει; Σχεδιάστε για την τροχιά αυτή το γράφημα της $f(t)$ συναρτήσει του χρόνου t. Τι συμπεριφορά περιγράφει αυτή η τροχιά; Είναι αναμενόμενη διαισθητικά αυτή η συμπεριφορά του συστήματος;