ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πρώτο τεστ στα Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

28 Μαρτίου 2018

Φ.Α.Ι.

Απαντήστε με προσοχή, συντομία και ακρίβεια. Σύνολο μορίων 130.

1. Γράψτε την αναδρομική σχέση Picard για τον προσδιορισμό της λύσης $x(t)$ που ικανοποιεί την: $t\dot{x} = x - 1$, με αρχική συνθήκη $x(0) = 1$ ($\dot{x} \equiv dx/dt$), και προσδιορίστε μέσω αυτής τη λύση που προκύπτει. Επιβεβαίωστε ότι η λύση είναι ορθή. **[10]**

2. Είναι η λύση που βρήκατε μοναδική; **[10]**

3. Ο διαδότης μετάβασης ενός συστήματος από $0 \to t_1$ είναι ο Φ_1, και από $t_1 \to t_2$ είναι ο Φ_2. Ποιος είναι ο διαδότης μετάβασης από $0 \to t_2$ και από $t_2 \to 0$; Σε ποιες αρχές βασιστήκατε για να προσδιορίστε το αποτέλεσμα (μονολεκτική απάντηση); **[10]**

4. Προσδιορίστε το διαδότη μετάβασης από $0 \to t_2$ του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = \begin{cases} x, & \text{για} \quad 0 \le t \le t_1 \\ 2x, & \text{για} \quad t_1 < t \le t_2 \end{cases}$$

[10]

5. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = 1 - x$. Προσδιορίστε τον ελκυστή του δυναμικού συστήματος και σχεδιάστε τη λύση $x(t)$ (χωρίς να λύσετε τη δ.ε.) όταν $x(0) = 0$ και όταν $x(0) = 2$. **[10]**

6. Γράψτε τις διαταρακτικές εξισώσεις περί το σημείο ισορροπίας του $\dot{x} = x + \alpha$ και προσδιορίστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Τώρα, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, γράψτε την αναλυτική λύση της $\dot{x} = x + \alpha$ αν $x(0) = x_0$ και εξηγήστε γιατί αυτή συμπίπτει με τη διαταρακτική λύση. **[10]**

7. Με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών:
   (α) Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές και προσδιορίστε το πεδίο $u(x,t)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t + e^{-t} u_x = 0, \quad u(x,0) = U(x), \quad t > 0, \;\; x \in \mathbb{R},$$

   Προσδιορίστε την $u(x,t)$ όταν $t >> 1$. **[10]**
   (β) Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές και προσδιορίστε τον παλμό $\phi(x,t)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$2x\phi_t + \phi_x = 0, \quad \phi(0,t) = \Phi(t), \quad x > 0, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

[15]

(γ) Αν

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad t < 0 \\ 1, & \text{για} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{για} \quad t > 1 \end{cases}$$

σκιαγραφίστε σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα την περιοχή του χωροχρόνου που υπάρχει μη μηδενική διαταραχή. Τι τιμή έχει η διαταραχή στην περιοχή αυτή; **[10]**

8. Για την εξίσωση Klein-Gordon:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + m^2 u = 0,$$

ζητούνται:

(α) Η σχέση διασποράς $\omega(k)$, η ταχύτητα φάσης v_p, και η ταχύτητα ομάδας v_g. Να συγκριθούν οι ταχύτητες v_p και v_g με την c και να δειχθεί ότι $v_p v_g = c^2$. **[15]**

(β) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier, δείξτε ότι

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \; .$$

[5]

(γ) Να δειχθεί τώρα ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $u(x,0) = \delta(x)$, $u_t(x,0) = 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) \cos[\omega(k)t] dk.$$

[15]

Λύσεις:

1 & 2. Η Picard είναι:

$$y_{n+1} = 1 + \int_0^t \frac{y_n(s) - 1}{s} ds \;\; n = 0, 1, 2, \cdots \quad y_0(t) = 1$$

άρα

$$y_1(t) = 1 \;\; , \cdots , y_n(t) = 1$$

η οποία συγκλίνει στη σταθερή

$$y(t) = 1$$

η οποία ικανοποιεί και τη διαφορική εξίσωση (δ.ε.) και τις αρχικές συνθήκες, άρα είναι μία λύση της δ.ε.

Η μοναδικότητα δεν εξασφαλίζεται διότι η συνάρτηση $f(y,t) = (y-1)/t$ της $\dot{y} = f(y,t)$ δεν έχει παράγωγο $\partial f/\partial t$ στο $t = 0$. Μάλιστα, εύκολα βλέπουμε οτι οι $y(t) = 1 + \alpha t$, για κάθε α, ικανοποιούν και την δ.ε. και τις αρχικές συνθήκες και συνεπώς υπάρχει απειρία λύσεων.

3. Ο διαδότης μετάβασης από $0 \to t_2$ είναι ο $\Phi_2\Phi_1$ δηλαδή η κατάσταση $x_0 \to \Phi_2\Phi_1 x_0$ ενώ ο διαδότης μετάβασης από $t_2 \to 0$ είναι $(\Phi_2\Phi_1)^{-1} = \Phi_1^{-1}\Phi_2^{-1}$. Το αποτέλεσμα αυτό βασίζεται στην ύπαρξη μοναδικής λύσης και στη γραμμικότητα.

4. Είναι

$$e^{2(t_2-t_1)}e^{t_1} = e^{2t_2-t_1} \; .$$

5. Είναι $x = 1$ στο οποίο μονότονα και με συνεχώς μειούμενη κλίση η $x(t)$ πηγαίνει ασυμπτωτικά σε αυτό.

6. Το σημείο ισορροπίας είναι το $x_e = -\alpha$, θέτουμε $x = -\alpha + \xi$ και η εξίσωση γίνεται ακριβώς

$$\dot{\xi} = \xi$$

με λύση

$$\xi(t) = e^t \xi_0$$

ή

$$x(t) + \alpha = e^t(x_0 + \alpha)$$

και συνεπώς η

$$x(t) = -\alpha + \alpha e^t + e^t x_0 \; .$$

είναι η ακριβής λύση. Η διαταρακτική μέθοδος έδωσε την ακριβη λύση διότι το πρόβλημα ήταν γραμμικό.

7 α) Ψάχνουμε καμπύλη $x(t)$ επί της οποίας η $u(t, x(t))$ να λαμβάνει σταθερές τιμές όσο εξελίσσεται ο χρόνος. Επί χαρακτηριστικής $x(t)$ έχω:

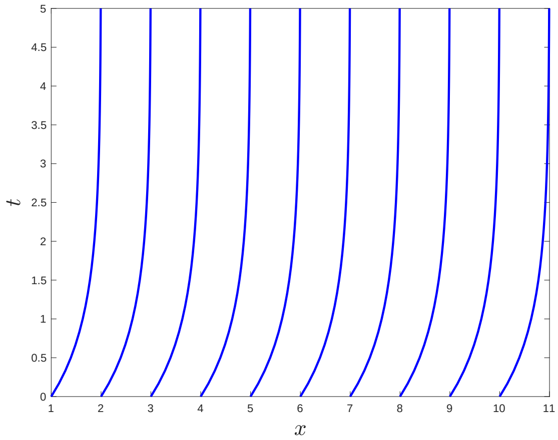
$$u_t + \dot{x} u_x = 0$$

Συνεπώς αν λάβω

$$\dot{x} = e^{-t} \quad ,\text{ή } x(t) = -e^{-t} + 1 + \xi$$

τότε

$$u(x,t) = u(\xi,0) = U(x - 1 + e^{-t})$$



Σχήμα 1: Χαρακτηριστικές Ασκ. 7α. Το πεδίο σε μεγάλους χρόνους είναι, όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι χρονοανεξάρτητο και ίσο με $u(x,t) = U(x-1)$.

Η παραπάνω είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών διότι αν γνωρίζουμε την κατάσταση του πεδίου για κάθε x αρχικά θα γνωρίζουμε τη λύση για κάθε $t > 0$, δεδομένου ότι οι καμπύλες αυτές καλύπτουν όλες τις τιμές του χωρόχρονου. (Τι γίνεται για εξέλιξη πίσω στο χρόνο;)

7 β) Στην περίπτωση αυτή ψάχνουμε για χαρακτηριστικές $t(x)$ επί των οποίων η $\phi(x, t(x))$ είναι σταθερή όσο προχωράμε στο χώρο. Δηλαδή επί των οποίων

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi_x + (dt/dx)\phi_t = 0$$

και αν στο συγκεκριμένο πρόβλημα λάβουμε

$$t = x^2 + t_0$$

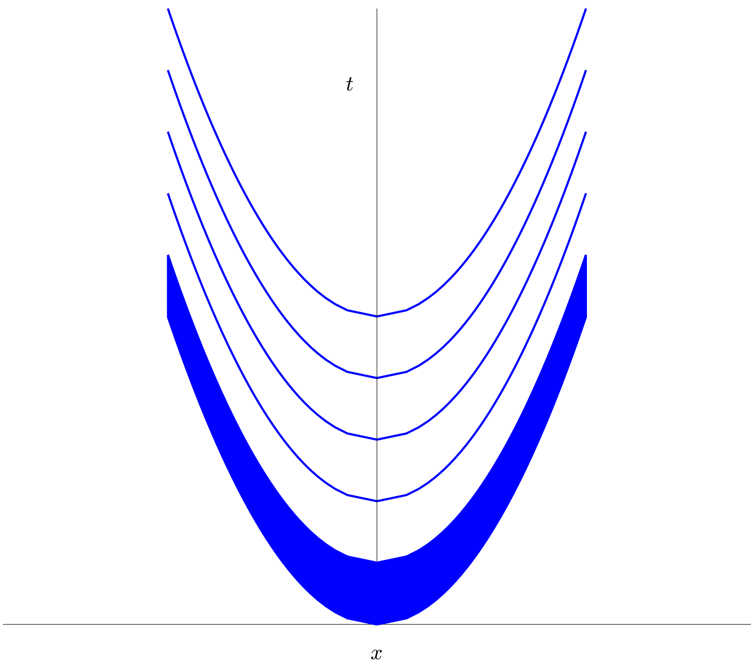
τότε η

$$\phi(x,t) = \phi(0,t_0) = \Phi(t_0) = \Phi(t - x^2)$$

επιλύει το πρόβλημα (βλ. σχήμα 2).

8. ¨Εχουμε:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx} dk$$



Σχήμα 2: Χαρακτηριστικές Ασκ. 7β. Στη σκιαγραφημένη περιοχή η τιμή του πεδίου είναι $\Phi = 1$, ενώ αλλού είναι $\Phi = 0$.

συνεπώς

$$\ddot{u}_k(t) + (m^2 + k^2c^2)u_k = 0$$

με λύση

$$u_k(t) = a\cos(\omega(k)t) \quad , \quad \omega(k) = \sqrt{m^2 + k^2c^2}$$

ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $u_t(x, 0) = 0$. Άρα,

$$u(x,t) = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega(k)t)e^{ikx}dk$$

και επειδή

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$$

και

$$u(x,0) = \delta(x) = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$$

έχουμε $a = 1$ και τελικά

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega(k)t) e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty} \cos(\omega(k)t) e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{0} \cos(\omega(k)t) e^{ikx} dk\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty} \cos(\omega(k)t) e^{ikx} dk + \int_{0}^{\infty} \cos(\omega(-k)t) e^{-ikx} dk\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(\omega(k)t)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) dk \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(\omega(k)t)\cos(kx) dk
\end{aligned}
$$

το οποίο είναι ίσο με το

$$
u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx)\cos[\omega(k)t] dk.
$$