ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Προβλήματα στα Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα
(ανανεωμένο 6 Μαρτίου 2018)

1. Να ελεγχθεί κατά πόσο μια χάντρα που κινείται ελεύθερα επί ενός σύρματος και ανακλάται ελαστικά στα άκρα αυτού (σε απόσταση L το ένα από το άλλο) περιγράφεται από ένα γραμμικό σύστημα.

2. Έστω η διαφορική εξίσωση $u_t + 2tu_x = 0$ με αρχ. συνθήκες $u(x,0) = e^{-x^2}$ να βρεθεί η εξέλιξη αυτής $u(x,t)$ με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών.

3. Να κατασκευαστεί πρόγραμμα το οποίο να προσομοιώνει τη συμπεριφορά της FPU για λίγα ($N = 3 - 10$) ελατήρια.

4. Να κατασκευαστεί η αναπράσταση του τελεστή d^2/dt^2 σε μορφή πίνακα (η διακριτοποιημένη εκδοχή αυτού) και να βρεθούν τα ιδιοανύσματα αυτού. [Υποδ.: Δείξτε ότι ο τελεστής αυτός μετατίθεται με τον τελεστή μετάθεσης κατά μια θέση στο διακριτό πλέγμα και εξ αυτού μοιράζονται κοινά ιδιοανύσματα.]

5. Μια σταγόνα η οποία ετοιμάζεται να πέσει στο βαρυτικό πεδίο υπακούει στην εξίσωση $\dot{z} = \sqrt{2gz}$ (η φορά του z είναι προς τα κάτω). Εξηγήστε που οφείλεται η μη μοναδικότητα των λύσεων αυτής της εξίσωσης.

6. Διερευνήστε τα προβλήματα της λύσης της εξίσωσης $\dot{x} = x^n$ για $n > 1$ και $n < 1$.

7. Διερευνήστε την ακρίβεια και την ταχύτητα υπολογισμού του e ακολουθώντας την προσέγγιση αυτού με πεπερασμένες επιλογές του n στην περίπτωση (i) $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ και (ii) $e = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots 1/n!$.

8. Έστω η κλασική κυματική εξίσωση $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Αν είναι $u(x,0) = f(x)$ (i) Θα μπορούσε να είναι $u(x,t) = f(x - ct)$. (ii) Θα μπορούσε για ($x \to \infty, t \to \infty$), να είναι $u(x,t) = 100f(x - ct)$;

9. Κατασκευάστε κυματική εξίσωση που να έχει διαφορετικές (αλλά σταθερές) ταχύτητες διάδοσης προς τα δεξιά και προς τα αριστερά.

10. Κατασκευάστε τη λύση της κυματικής εξίσωσης (όπως στο μάθημα της 6/3) με τη μέθοδο μετασχηματισμού Fourier για δοσμένες αρχικές συνθήκες: $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x)$.

11. Έστω η εξίσωση του τηλεγραφητή
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + au_t + bu = 0$$
με $k_c^2 = 0$. Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό Fourier για να κατασκευάσετε τη λύση της διαμορφωθείσας εξίσωσης
$$(\partial_t + c\partial_x + \frac{a}{2})(\partial_t - c\partial_x + \frac{a}{2})u = 0.$$
Απ.: $u(x,t) = e^{-at/2}[F(x - ct) + G(x - ct)]$.

12. Θεωρήστε την αναδρομική ακολουθία $x_{n+1} = e^{(1-x_n)\delta} x_n$ με $x_1 = \alpha > 0$ που αντιστοιχεί σε επίλυση της $\dot{x} = (1-x)x$, $x(0) = \alpha$, με εκθετική προώθηση χρονικού βήματος $\delta > 0$. Δείξτε ότι το σταθερό σημείο του πληθυσμού $x = 1$ είναι ευσταθές μόνο για βήματα $0 < \delta < 2$. Δείξτε ότι για $\delta > 2$ ο πληθυσμός παρουσιάζει περιοδικότητα και για ακόμα μεγαλύτερες τιμές ο ελκυστής του πληθυσμού (το Ω σύνολο) φαίνεται να σχηματίζει πυκνό σύνολο (μπορείτε να κατασκευάστε το διάγραμμα της πυκνότητας της πιθανότητας των τιμών του πληθυσμού στην περίπτωση αυτή;).

13. Κατασκευάστε τις ακόλουθες αμφίδρομες κυματικές εξισώσεις $u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + m^2 u = 0$, $u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - \alpha(u^2)_{xx} - \beta u_{xxxx} = 0$, με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιήσαμε στη τάξη για τις μονόδρομες εξισώσεις, μετατρέποντας την πραγματική εξίσωση διασποράς $\omega^2 = \alpha_0 + \beta_0 k + \gamma_0 k^2 + \cdots$ στις παραπάνω πεδιακές εξισώσεις.

14. Οταν κάνουμε γραμμικοποίηση περί κάποιο σημείο ισορροπίας x_e της $\dot{x} = f(x)$, οι μικρές απομακρύνσεις ξ από το σημείο ισορροπίας διέπονται από τη γραμμική εξίσωση: $\dot{\xi} = f'(x_e)\xi$. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η απομάκρυνση ξ είναι μικρή;

15. Εξηγείστε τον λόγο που η αναδρομική ακολουθία $x_{n+1} = e^{(1-x_n)\delta} x_n$ με $x_1 = \alpha > 0$ εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση περί το σταθερό σημείο του πληθυσμού $x = 1$ για $1 < \delta < 2$. Είναι το σημείο $x_e = 1$ τελικά σημείο έλξεως όταν $\delta = 2$; (Υπ. να συμπεριλάβετε και ανώτερους όρους στο ανάπτυγμα Taylor).

16. Είδαμε στη τάξη ότι για μικρά $\varepsilon > 0$ και $\delta > 2 + \varepsilon$ το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = e^{(1-x_n)\delta} x_n$ παρουσιάζει περιοδικότητα περιόδου 2. Αν η αναδρομική σχέση είναι η $x_{n+1} = f(x_n)$ περιοδικές λύσεις περιόδου 2 είναι σταθερά σημεία της $x_{n+2} = f(f(x_n))$. Σχεδιάστε την $y = f(f(x))$ με την MATLAB στην περίπτωση της $x_{n+1} = e^{(1-x_n)\delta} x_n$, για διαφορετικά δ, μαζύ με την $y = f(x)$ και την $y = x$ για να αντιληφθείτε πως και πότε εμφανίζονται οι λύσεις περιόδου 2. Δείξτε ότι τα σταθερά σημεία περιόδου 2 δίδονται από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x e^{(1-x)\delta} + x - 2 = 0.$$

17. Η πρώτη παράγωγος ϕ_x στα σημεία $x = n\delta$ προσεγγίζεται καλά από την

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=n\delta} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2\delta} ,$$

όταν το δ είναι αρκούντως μικρό. Παρόμοια η δεύτερη παράγωγος προσεγγίζεται από την

$$\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x=n\delta} = \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{\delta^2} .$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να μετατρέψουμε τις κυματικές εξισώσεις $\phi_t + c\phi_x = 0$ και $\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} = 0$ αντίστοιχα στα εξής δυναμικά συστήματα

$$\frac{d\phi_n}{dt} = -\frac{c}{2\delta}(\phi_{n+1} - \phi_{n-1}) \ , \quad \frac{d^2\phi_n}{dt^2} = \frac{c^2}{\delta^2}(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) ,$$

για την εξέλιξη των καταστάσεων $\phi_n(t) \equiv \phi(n\delta, t)$ όπου το n μπορεί να παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές ($-\infty < n < \infty$). Δείξτε ότι η κατάσταση $\phi_n(t) = \hat{\phi}_k(t) e^{ikn\delta}$ διαγωνοποιεί το παραπάνω δυναμικό σύστημα και εξ'αυτού προσδιορίστε τις αντίστοιχες σχέχεις διασποράς. Σχεδιάστε την προσεγγιστική ομαδική ταχύτητα. Αν θέλετε να προσεγγίσετε καλά τη δυναμική εξέλιξη κυμάτων μήκους κύματος λ, τι διακριτοποίηση πρέπει να επιλέξτε;

18. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα που παράγεται από την εξής απεικόνιση "τέντας" (tent map)

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & \text{αν} \;\; 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x_n), & \text{αν} \;\; 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

που ορίζεται στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$. Προσδιορίστε το σταθερό σημείο της απεικόνισης καθώς και την ευστάθειά του. Προσδιορίστε τα σημεία περιόδου 2 καθώς και την ευστάθεια τους. Υπάρχουν σημεία περιόδου 3; περιόδου 4; περιόδου n; Μπορείτε να προσδιορίστε την ευστάθειά τους;

19. Θέλουμε να προωθήσουμε την κατάσταση του συστήματος $x_n \equiv x(t_n)$ στην κατάσταση $x_{n+1} \equiv x(t_n + \delta)$ δεδομένου ότι οι καταστάσεις ικανοποιούν την εξής δυναμική:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \,,$$

όπου $f(x,t)$ μία απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς x και ως προς t. Προς τούτο υπολογίζουμε τις κλίσεις

$$k_1 = f(x_n, t_n) \quad , \quad k_2 = f(x_n + \alpha\delta k_1, t_n + \alpha\delta)$$

και εκτιμούμε την νέα κατάσταση ως:

$$x_{n+1} = x_n + \delta(\beta k_1 + \gamma k_2)$$

Με ποιόν συνδυασμό των α, β, γ επιτυγχάνεται το λάθος να είναι τάξης $O(\delta^3)$; Ποιά επιλογή των α, β, γ οδηγεί στο μικρότερο λάθος τάξης $O(\delta^3)$.

20. Θεωρούμε αυτοκίνητα σε έναν ευθύγραμμο αυτοκινητόδρομο στη διεύθυνση x. Παρότι τα αυτοκίνητα είναι διακριτά παρατηρούμε τον αυτοκινητόδρομο από πολύ ψηλά και θεωρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε έτσι την συνεχή και διαφορίσιμη συνάρτηση πυκνότητας των αυτοκινήτων $\rho(x,t)$ έτσι ώστε ο αριθμός των αυτοκινήτων στο διάστημα $[x_1, x_2]$ να δίνεται κατά προσέγγιση από τον πραγματικό αριθμό $N(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho dx$. Τα αυτοκίνητα τα οποία βρίσκονται στο σημείο x τη χρονική στιγμή t έχουν ταχύτητα $u(x,t) \geq 0$ (δηλαδή ο δρόμος είναι μονής κατευθύνσης και δεν μπορεί κανείς να αναστρέψει τη κίνηση του). Θεωρούμε ότι η ταχύτητα των αυτοκινήτων $u(x,t)$ είναι συνάρτηση της τοπικής πυκνότητας των αυτοκινήτων $\rho(x,t)$ (δηλαδή οι οδηγοί δεν προσαρμόζουν την ταχύτητα τους επειδή ακούν πληροφορίες από το ραδιόφωνο για τη κίνηση κάπου αλλού, ξέρουν και κινούνται σύμφωνα μόνο με τι γνωρίζουν στην άμεση περιοχή τους). Οι συμφοιτητές σας δίπλα στο ΕΜΠ μετά από κοπιώδεις και μακροχρόνιες παρατηρήσεις βρήκαν ότι η σχέση μεταξύ των δύο πεδίων δίνεται σε πολύ καλή προσέγγιση από την:

$$u(\rho) = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

όπου u_m η μέγιστη ταχύτητα των αυτοκινήτων (θεωρούμε ότι όλα τα αυτοκίνητα είναι ίδια), ρ_m η μέγιστη πυκνότητα (που επιτυγχάνεται όταν ένα αυτοκίνητο αγγίζει το άλλο). Η σχέση αυτή υποθέτει ότι όλοι οι οδηγοί συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο και κινούνται με την ίδια ταχύτητα για κάθε πυκνότητα κίνησης. Όταν αυξάνεται η πυκνότητα, η απόσταση μεταξύ των αυτοκινήτων μικραίνει και ακαριαία μειώνεται η ταχύτητα. Η ταχύτητα δηλαδή των αυτοκινήτων προσαρμόζεται ακαριαία. Σε αυτή τη θεώρηση τα αυτοκίνητα δεν επιταχύνουν ούτε επιβραδύνουν. Επίσης, σε αυτή τη θεώρηση γρήγορα αυτοκίνητα δεν μπορούν να προσπεράσουν αυτά που κινούνται πιο αργά. Επίσης δεν υπάρχουν ζώνες όπου επιβάλλεται η ταχύτητα. Αναφέρουμε όλα τα παραπάνω διότι είναι σημαντικό να αντιληφθούμε τις παραδοχές που έχουμε κάνει. Έχω ξεχάσει κάποια άλλη σημαντική παραδοχή που έχω έμμεσα ή άμεσα επιβάλλει;

Η ροή των αυτοκινήτων είναι $q = \rho u$. Δείξτε ότι η εξίσωση συνέχειας συνεπάγεται ότι η κατανομή της πυκνότητας είναι:

$$\rho_t + q'(\rho)\rho_x = 0 \quad , \quad q'(\rho) = u_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) .$$

(Έχουμε υποθέσει εδώ περαιτέρω ότι δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες αυτοκινήτων όπως αυτοκίνητα που εμφανίζονται από υπόγεια γκαράζ, ή ντεραπάρουν και πέφουν στη θάλασσα, ή συμβολές ή διαχωρισμοί δρόμων).

α) Έστω ότι $\overline{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα των αυτοκινήτων στον αυτοκινητόδρομο (γιατί αυτή η μέση τιμή είναι ανεξάρτητη και από το x και το t;) και θεωρούμε ότι η πυκνότητα είναι σχεδόν ομογενής δηλαδή είναι $\rho = \overline{\rho} + \rho'$ όπου $\rho'/\rho << 1$. Γράψτε την γραμμικοποιημένη εξίσωση που ικανοποιεί η ρ', και λύστε την. Με τι ταχύτητα θα κινούνται τα αραιώματα και τα πυκνόματα κίνησης; Για ποία μέση πυκνότητα επιτυγχάνεται η μέγιστη ταχύτητα κίνησης αυτών των ανωμαλιών;

β) Θεωρούμε τώρα ότι αρχικά τα αυτοκίνητα είναι σταματημένα σε ένα κόκκινο φως και στον χρόνο $t = 0$ το φως πρασινίζει. Η αρχική κατανομή πυκνότητας είναι δηλαδή:

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) = \begin{cases} \rho_m, & x < 0 \\ 0\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές και προσδιορίστε το πεδίο ταχυτήτων κάποια χρονική στιγμή. Μπορείτε να το κάνετε αυτό σε αυτή την ιδεατή περίπτωση που η πυκνότητα είναι ασυνεχής συνάρτηση; Τι θα κάνατε για να προσδιορίσετε το πεδίο ταχυτήτων;

21. Η κίνηση των παγετώνων εμπεριέχει πολύπλοκη δυναμική και ερευνάται με ιδιαίτερη ένταση τον τελευταίο καιρό. Σε γενικές γραμμές η κίνηση προκαλείται από δύο διαδικασίες α) από εσωτερική πλαστική παραμόρφωση ή β) από το σιγανό οιωνεί στατικό γλίστρημα του παγετώνα πάνω στο πέτρινο υπόστρωμα του εδάφους. Η πρώτη διαδικασία κυριαρχεί σε ογκώδεις κρύους παγετώνες, ενώ η δεύτερη σε λεπτούς και σχετικά ζεστούς παγετώνες. Εμείς θα θεωρήσουμε την β) δυναμική και έστω ότι μελετάμε τη μονοδιάστατη κίνηση παγετώνα που γλυστρά σε κεκλιμένο υπόστρωμα κλίσης α, ο οποίος χαρακτηρίζεται από το πάχος του, $h(x,t)$, και την ταχύτητα του, $u(x,t)$, οι οποίες είναι συναρτήσεις μόνο των x και t. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα υπακούει στον νόμο $u = \beta\tau^m$ όπου $\tau = \rho g h \alpha$ (ρ η πυκνότητα του πάγου, g η ένταση του βαρυτικού πεδίου) η κατά προσέγγιση δύναμη της βαρύτητας στη κατεύθυνση της ροής του κεκλιμένου επιπέδου (δεν είναι δηλαδή απόλυτα Αριστοτέλεια η δυναμική). Συνάγετε την εξίσωση συνέχειας του παγετώνα $h_t + (uh)_x = 0$ και προσδιορίστε την εξίσωση που διέπει το $h(x,t)$. Πειράματα στις Άλπεις έχουν προσδιορίσει ότι μία ζώνη σταθερού πάχους κινούνταν με ταχύτητα 0.2 km/yr, ενώ η αντίστοιχη μέση ταχύτητα του πάγου ήταν περίπου 0.07 km/yr. Προσδιορίστε από την παρατήρηση αυτή την τιμή του εκθέτη m.

22. Θεωρήστε το μοντέλο περιοδικής αλίευσης:

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x - \alpha(1 + \varepsilon \sin(2\pi t))\ ,\ x \geq 0,\ \ \alpha > 0.$$

Στην περίπτωση σταθερής αλίευσης με ρυθμό α και $\varepsilon = 0$ προσδιορίστε το διάγραμμα διακλάδωσης συναρτήσει του ρυθμού αλίευσης α (δηλαδή τη γραφική παράσταση των σημείων ισορροπίας του συστήματος συναρτήσει του α). Για ποιό α ο πληθυσμός αφανίζεται; Τώρα προσδιορίστε για την περίπτωση $\varepsilon = 0.1$ το διάγραμμα διακλάδωσης των σταθερών σημείων της απεικόνισης Poincare συναρτήσει του α και συγκρίνατε τα δύο διαγράμματα. Έχει σημασία το πρόσημο του ε; Τα συμπεράσματα σας εξαρτώνται από το ε;

23. (Περιβάλλουσες ή καυστικές καμπύλες). Θεωρήστε την οικογένεια των καμπύλων $f(x, y, \alpha) = 0$, με παράμετρο α. Π.χ. θεωρήστε την οικογένεια των ευθειών $f(x, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - 1 = 0$. Σχεδιάστε μερικές από αυτές. Θα διαπιστώσετε ότι η οικογένεια αυτή έχει μία περιβάλλουσα (ή καυστική) καμπύλη, δηλαδή μια καμπύλη η οποία σε κάθε σημείο της εφάπτεται κάποιας ευθείας της παραπάνω οικογένειας. Ποιά είναι η περιβάλλουσα της παραπάνω οικογένειας (χωρίς να κάνετε υπολογισμό); Θέλουμε να προσδιορίσουμε αναλυτικά την περιβάλλουσα αν υπάρχει. Οι καμπύλες $f(x, y, \alpha) = 0$ και $f(x, y, \alpha + \delta\alpha) = 0$ τέμνονται στο σημείο x, y οπότε στο σημείο αυτό θα είναι επίσης $f(x, y, \alpha + \delta\alpha) - f(x, y, \alpha) = 0$ που από το θεώρημα μέσης τιμής συνεπάγεται ότι $\partial f/\partial\alpha(x, y, \alpha + \theta\delta\alpha) = 0$ για κάποιο $0 \leq \theta \leq 1$, και επειδή στο όριο $\delta\alpha \to 0$ το σημείο τομής γίνεται σημείο της περιβάλλουσας, στο σημείο αυτό της περιβάλλουσας θα πρέπει συγχρόνως να ικανοποιούνται οι συνθήκες: $f(x, y, a) = 0$ (επειδή το σημείο είναι σημείο της καμπύλης) και $\partial f/\partial\alpha = 0$ (επειδή το σημείο αυτό είναι κοινό σημείο και της καμπύλης με παράμετρο α και κάθε καμπύλης $\alpha + \delta\alpha$ με $\delta\alpha \to 0$. Συνεπώς η αναλυτική εξίσωση της περιβάλλουσα προκύπτει από την απαλοιφή της παραμέτρου α από τις $f(x, y, a) = 0$ και $\partial f/\partial\alpha = 0$. Προσδιορίστε τώρα με αναλυτικό τρόπο την περιβάλλουσα της οικογένειας των ευθειών $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$. Επίσης προσδιορίστε την περιοχή του χώρου στην οποία μπορεί να βρεθεί ένα βλήμα όταν βάλλεται με ταχύτητα v_0 από κάποιο σημείο με ακαθόριστη κατεύθυνση στο βαρυτικό επίπεδο έντασης g (έτσι προσδιορίζεται η περιοχή ασφαλείας, δηλαδή η περιοχή στην οποία δεν υπάρχει περίπτωση να τραυματισθείτε από το βλήμα).

    Θα δείξουμε τώρα ότι η κάθε σημείο της περιβάλλουσας, που έχουμε κατασκευάσει με τον παραπάνω τρόπο, εφάπτεται κάποιου σημείου καμπύλης της οικογένειας $f(x, y, \alpha) = 0$. Έστω ότι η περιβάλλουσα έχει παραμετρική εξίσωση $x = \phi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$ όπου το α είναι η τιμή της παράμετρου για την οποία είναι $f(x, y, \alpha) = 0$ ή $f(\phi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha) = 0$ για κάθε α δηλαδή επί της περιβάλλουσας:
$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$
    και επειδή επί της περιβάλλουσας $\partial f/\partial\alpha = 0$ θα έχουμε
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} = 0$$
    που σημαίνει ότι:
$$\frac{dy}{d\alpha} \Big/ \frac{dx}{d\alpha} = - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \Big/ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_f \ .$$
    Το αριστερό μέλος αυτής της ισότητας είναι η κλίση της εφαπτομένης της περιβάλλουσας ενώ το δεξί μέλος η κλίση της καμπύλης της οικογένειας $f(x, y, \alpha) = 0$ η οποία τέμνεται με την περιβάλλουσα.

24. Σχεδιάστε με matlab τις χαρακτηριστικές της
$$u_t + uu_x = 0$$
    με $u(x, 0) = \exp(-x^2)$. Προσδιορίστε αναλυτικά την περιβάλλουσα καμπύλη των τομών των χαρακτηριστικών και σημειώστε επί αυτής το χωροχρονικό σημείο στο οποίο σχηματίζεται πρώτα ανωμαλία στη λύση.

25. Θεωρήστε τώρα την
$$u_t + uu_x + au = 0$$
    με $u(x, 0) = k \exp(-x^2)$. Για ποιές τιμές των a και k αποφεύγεται η εμφάνιση ανωμαλίας στη λύση.

26. Σχεδιάστε με προσοχή το διάγραμμα διακλάδωσης των σημείων ισορροπίας του δυναμικού συστήματος:
$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \ .$$

27. Προσδιορίστε τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ σχεδιάζοντας με αριθμητική ολοκλήρωση μερικές τροχιές του συστήματος.

28. Σχεδιάστε με αριθμητική ολοκλήρωση τη ροή στο χώρο $(x, \dot{x})$ του δυναμικού συστήματος $\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ για $\varepsilon = 0.01$ Πόσο πρέπει να είναι το χρονικό βήμα για να μπορέσετε να σχεδιάσετε τις τροχιές; Τι συμβαίνει όταν το βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης δεν είναι πλέον μικρό;

29. Δίδονται δύο μοναδιαία πραγματικά διανύσματα ψ_1, ψ_2 στο επίπεδο που σχηματίζουν γωνία $\pi/2 \geq \theta > 0$ μεταξύ τους. Κάθε διάνυσμα του χώρου ψ μπορεί συνεπώς να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο διανυσμάτων δηλαδή ως $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$. Ο συντελεστής $|\alpha|$ προσδιορίζει το βαθμό που διεγείρει το ψ το πρώτο διάνυσμα ψ_1. Εξηγήστε με γεωμετρική κατασκευή πως θα αναλύσετε το ψ στα ψ_1 και ψ_2. Τώρα με γεωμετρική κατασκευή προσδιορίστε και χαρακτηρίστε το μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο που διεγείρει μέγιστα το ψ_1. Προσπαθήστε τώρα να επιτύχετε αυτή τη κατασκευή με τη χρήση εσωτερικών γινομένων.

30. Θεωρήστε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} -1 & r \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$
Δείξτε ότι ο πίνακας αυτός ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο και ότι δεν διαγωνοποιείται. Υπολογίστε τώρα αθροίζοντας την αντίστοιχη εκθετική σειρά τον διαδότη του πίνακα: e^{At}. Δείξτε τώρα ότι ο πίνακας
$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -1 & r \\ 0 & -1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$
διαγωνοποιείται για $\varepsilon \neq 0$, διαγωνοποιείστε τον και έπειτα υπολογίστε τον πίνακα $e^{A(\varepsilon)t}$ χρησιμοποιώντα τη διαγωνοποιημένη μορφή του πίνακα. Τέλος πάρτε το όριο $\varepsilon \to 0$ και δείξτε ότι καταλήγετε στον διαδότη e^{At} που ήδη υπολογίσατε. Τώρα σχεδιάστε με MATLAB συναρτήσει του χρόνου το μέτρο του $x(t) = e^{At}x(0)$ με $r = 100$ για τις εξής 10 μοναδιαίου μέτρου αρχικές συνθήκες $x(0) = (\cos\theta, \sin\theta)^T$ με $\theta = n\pi/10$ και $n = 0, 1, \cdots, 9$. Το απλό αυτό σύστημα περιγράφει τις γραμμικές διαδικασίες κατά τη μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση.

31. Βρείτε τις αναλλοίωτες διευθύνσεις του σημείου ισορροπίας του δυναμικού συστήματος
$$\dot{x} = x + e^{-y} \ , \ \dot{y} = -y \ .$$
Προσδιορίστε τις καμπύλες στις οποίες εξελίσσονται οι αναλλοίωτες διευθύνσεις όταν ληφθούν υπόψη οι μη γραμμικοί όροι (τη μη γραμμική επέκταση των αναλλοιώτων ευθειών). Για να το κάνετε αυτό αρχίστε πολύ πλησίον στο σημείο ισορροπίας εισάγοντας αρχική διαταραχή ανάλογη της αναλλοίωτης διεύθυνσης, και ολοκληρώστε το σύστημα αριθμητικά (για αρνητικούς χρόνους αν η διεύθυνση είναι ευσταθής). Προσπαθήστε να σχεδιάσετε αρχίζοντας από άλλα σημεία τις τροχιές του δυναμικού συστήματος. Μπορείτε να αποκλείσετε ότι υπάρχει οριακός κύκλος σε αυτό το δυναμικό σύστημα;

32. α) Ενα τυχόν χωρίο $\mathcal{D}$ στις 2 διαστάσεις μετσασχηματίζεται στο χωρίο $\mathcal{D}'$ με τον γραμμικό μετασχηματισμό A. Δείξτε από πρώτες αρχές ότι ο λόγος των εμβαδών τους είναι:
$$\frac{E(\mathcal{D}')}{E(\mathcal{D})} = \det A \ .$$
όπου $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$, και A_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα A. β) Δείξτε για πίνακες 2X2 ότι $\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{trace}(A) + O(\varepsilon^2)$. Μπορείτε να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία στο αποτέλεσμα αυτό;

33. Δείξτε με αντικατάσταση ότι η ειδική λύση της

$$\dot{x} = Ax + f(t) ,$$

είναι η

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} f(s) ds .$$

Αυτό πρέπει να το γνωρίζετε απέξω. Τώρα βασισμένοι σε αυτό το αποτέλεσμα υπολογίστε την ειδική λύση της

$$\ddot{x} + x = \cos t .$$

34. Θεωρήστε την εξίσωση Van der Pol

$$\dot{x} = y \ , \ \dot{y} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)y \ , x(0) = 1 \ , \ y(0) = 0;$$

με $\varepsilon << 1$. Γράψτε τις εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ και δείξτε ότι σε πρώτη τάξη ως προς ε ότι

$$\dot{R} = -\frac{\varepsilon}{4} R(R^2 - 4) \ , \ \dot{\Theta} = -1 ,$$

όπου

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} r(s) ds \ , \ \Theta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \theta(s) ds \ .$$

Υποθέστε ότι αρχικά $R(0) = 1$ και $\Theta(0) = 0$, και προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση των $R(t)$ και $\Theta(t)$. Συγκρίνατε την προσεγγιστική λύση $x = R(t)\cos\Theta(t)$ και $y = R(t)\sin\Theta(t)$ με τη λύση που προκύπτει από αριθμητική ολοκλήρωση για $\varepsilon = 0.01, 0.1, 0.5$.

35. Θεωρήστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή:

$$\dot{x} = y - \mu x \left(\frac{|x|}{2} - 1 \right) \ , \ \dot{y} = -x .$$

με $\mu > 0$.

α) Προσδιορίστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.
β) Υποθέστε ότι υπάρχει ένας οριακός κύκλος. Αν $0 < \mu << 1$ χρησιμοποιώντας ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε τον και επιβεβαιώστε την απάντηση σας με αριθμητική ολοκλήρωση.
γ) Στην περίπτωση αυτή προσδιορίστε την ευστάθειά του (δηλαδή προσδιορίστε αναλυτικά όλους τους εκθέτες Lyapunov διαταραχών περί την τροχιά).
δ) Προσδιορίστε κατά προσέγγιση το σχήμα του οριακού κύκλου όταν $\mu >> 1$ και προσδιορίστε σε πρώτη τάξη την περίοδο της οριακής αυτής ταλάντωσης.

36. Θεωρήστε ένα ταλαντωτή $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ του οποίου η συχνότητα $\omega(t)$ μεταβάλλεται περιοδικά λαμβάνοντας διαδοχικά και για χρονικά διαστήματα $T/2$ τις δύο τιμές $1+\varepsilon$, $1-\varepsilon$. Υπολογίστε τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(T)$. Σχεδιάστε διάγραμμα των χαρακτηριστικών εκθετών Lyapunov συναρτήσει του ε και της περιόδου T για όσες περισσότερες γλώσσες του Arnold μπορείτε. Πώς είναι το διάγραμμα αυτό για αρνητικές τιμές του ε;

37. Τρείς τρόποι υπολογισμού της ευστάθειας του οριακού κύκλου του δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = y + \varepsilon x(1 - x^2 - y^2) \ , \ \dot{y} = -x + \varepsilon y(1 - x^2 - y^2) \ , \ \varepsilon = 0.02.$$

α) Πρώτος τρόπος. Γράψτε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Προσδιορίστε τον οριακό κύκλο και από την πολική μορφή του δείξτε ότι ο οριακός κύκλος

είναι ευσταθής (ασταθής) με εκθέτη Lyapunov $\lambda = -2\varepsilon$.
β) Δεύτερος τρόπος. Εργαστείτε στο αρχικό σύστημα με μεταβλητές (x, y) και προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση του Ιακωβιανού πίνακα $A(t)$ που διέπει τη δυναμική των διαταραχών γύρω από την περιοδική τροχιά (Υπ. Προσέξτε να παραμετρήσετε την τροχιά έτσι ώστε να αντιστοιχεί στη σωστή φορά της κίνησης). Υπολογίστε τώρα αριθμητικά τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(T)$ που αντιστοιχεί στον $A(t)$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του διαδότη μίας περιόδου. Επιβεβαιώστε ότι η μία είναι (κατά πολύ καλή προσέγγιση) 1 και η άλλη έχει απόλυτη τιμή $\exp(-2\varepsilon T)$ όπου T η περίοδος της κίνησης. Συνεπώς επιβεβαιώνεται και πάλι ότι οι εκθέτες Lyapunov είναι $\lambda = 0$ και

$$\lambda = \frac{\log(\exp(-2\varepsilon T))}{T} = -2\varepsilon \ .$$

γ) Τρίτος τρόπος. Υπολογίστε το $\exp(\int_0^T \mathrm{trace}(A(t'))dt')$ όπου T η περίοδος της κίνησης και επιβεβαιώστε ότι αυτό είναι ίσο με τα $\det(\Phi(T))$ που υπολογίσατε προηγουμένως και δείξτε οτι ο μή μηδενικός εκθέτης Lyapunov είναι

$$\lambda = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{trace}(A(t'))dt' = -2\varepsilon \ .$$