ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

2 Μαρτίου 2018

Θεώρημα ύπαρξης λύσης της $\dot{x} = f(x)$ με $x(0) = x_0$ με τη μέθοδο Picard-Lindelöf .

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\dot{x} = f(x)$ με $x(0) = x_0$ έχει μία και μοναδική λύση με την υπόθεση ότι η συνάρτηση $f(x)$ για $|x - x_0| < a$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \ .$$

Η συνθήκη Lipschitz συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της Επίσης αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της ειναι φραγμένη σε ένα κλειστό διάστημα τότε η συνάρτηση είναι Lipschitz σε αυτό το διάστημα. Αλλά κάθε συνεχής συνάρτηση δεν είναι Lipschitz, ούτε η συνθήκη Lipschitz συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη– σκεφθείτε παραδείγματα. Συνεπώς η συνθήκη Lipschitz είναι ισχυρότερη από τη συνέχεια αλλά κάπως ασθενέστερη από την παραγωγισιμότητα. (Καλον είναι να διαβάσετε το εξαίρετο κεφ. 4 του βιβλίου του Arnold).

Τώρα με την απόδειξη. Θεωρήστε την αναδρομική ακολουθία συναρτήσεων:

$$\phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(\phi_n(s))ds \ \ , \quad \phi_0(t) = x_0 \ , \quad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{1}$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι εφόσον η f είναι συνεχής θα είναι και ολοκληρώσιμη και η κάθε $\phi_n(t)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη.

Τώρα θα κατασκευάσουμε μία λύση της διαφορικής εξίσωσης. Από την αναδρομική ακολουθία έχουμε $\phi_0(t) = x_0$ και

$$\phi_1(t) = x_0 + f(x_0)t \ .$$

Απαιτούμε να είναι $|\phi_1(t) - x_0| < a$ που απαιτεί η λύση να επεκτείνεται μέχρι τους χρόνους $-a/M < t < a/M$, όπου $M = \max(|f|)$ στο $|x - x_0| < a$, διότι είναι $|\phi_1(t) - x_0| = |\int_0^t f(x_0)ds| \leq M|t| < a$. Ομοίως αν $|t| < a/M$ τότε με επαγωγή αμέσως προκύπτει οτι όλα τα ϕ_n ικανοποιούν την $|\phi_n(t) - x_0| < a$, διότι αν είναι $|\phi_n(t) - x_0| < a$ για όλα τα $|t| < a/M$ τότε $|f(\phi_n(t))| \leq M$ και συνεπώς $|\phi_{n+1}(t) - x_0| = |\int_0^t f(\phi_n(s))ds| \leq M|t| < a$. Δεδομένου ότι έχουμε περιορισθεί στους χρόνους για τους οποίους η συνθήκη Lipschitz ισχύει για όλες τις $\phi_n(t)$ θα έχουμε διαδοχικά για χρόνους $|t| < a/M$:

$$\begin{aligned} |\phi_2(t) - \phi_1(t)| &\leq \int_0^t |f(\phi_1(s)) - f(\phi_0(s))|ds \\ &\leq k\int_0^t |\phi_1(s) - \phi_0(s)|ds = kf(x_0)\frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|\phi_3(t)-\phi_2(t)| &\le \int_0^t |f(\phi_2(s))-f(\phi_1(s))|ds\\ &\le k\int_0^t |\phi_2(s)-\phi_1(s)|ds\\ &\le k^2 f(x_0)\int_0^t \frac{s^2}{2}ds = k^2 f(x_0)\frac{t^3}{3!}\ ,\end{aligned}$$

και τελικά:

$$|\phi_{n+1}(t)-\phi_n(t)| \le k^n f(x_0)\frac{t^n}{n!}$$

Οι παραπάνω ανισότητες αποδεικνύουν ότι η σειρά

$$S_n(t)=\phi_0(t)+(\phi_1(t)-\phi_0(t))+\cdots(\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t))\ .$$

είναι απολύτως συγκλίνουσα για $|t|<M/a$ διότι το άθροισμα των απολύτων τιμών n όρων σειρας είναι μικρότερο από τη σειρά

$$|x_0|+\frac{|f(x_0)|}{k}\left(kt+\frac{(kt)^2}{2}+\frac{(kt)^3}{3!}+\frac{(kt)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

που συγκλίνει στο

$$|x_0|+\frac{|f(x_0)|}{k}\left(1-e^{kt}\right)$$

και η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της S_n σχηματίζει μία αύξουσα και συγχρόνως φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων, η οποία είναι απολύτως συγκλίνουσα. Δεδομένου ότι συγκλίνει απολύτως η S_n είναι συγκλίνουσα και επιπλέον η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (ομαλή). Ομαλή σύγλιση των συναρτήσεων $\phi_n(t)$ στο $\phi(t)$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N, τέτοιος ώστε για κάθε $k>N$ και για όλους τους χρόνους $|t|<M/a$ να είναι $|\phi_k(t)-\phi(t)|<\varepsilon$ (δηλαδή να μην εξαρτάται το ε από το t)[1].

Αλλά $S_n=\phi_n(t)$ και έτσι αποδείξαμε ότι η αναδρομική ακολουθία των συναρτήσεων $\phi_n(t)$ έχει όριο

$$\phi_n(t)\to\phi(t)\ .$$

Μάλιστα η ομοιόμορφη (ομαλή) σύγκλιση στην $\phi(t)$ εξασφαλίζει ότι η $\phi(t)$ είναι παραγωγίσιμη δεδομένου ότι είναι το όριο των παραγωγισίμων $\phi_n(t)$. Επίσης επειδή η f είναι συνεχής θα ισχύει ότι

[1] Αν η σύγκλιση δεν είναι ομαλή δεν εξασφαλίζεται η συνάρτηση όριο $\phi(t)$ να είναι συνεχής αν οι $\phi_n(t)$ είναι συνεχείς, ούτε να είναι παραγωγίσιμη η $\phi(t)$ αν οι $\phi_n(t)$ είναι παραγωγίσιμες και να είναι $d\phi_n(t)/dt\to d\phi(t)/dt$, ούτε τέλος να ισχύει $\int\phi_n\to\int\phi$. Αντίστοιχα παραδείγματα μη ομαλούς σύγκλισης: η ακολουθία συναρτήσεων $\phi_n=nt/(1+nt^2)$ συγκλίνει στην $\phi(t)=1/t,\ t\neq 0$ και στην $\phi(t)=0$ όταν $t=0$. Η σύγκλιση όμως δεν είναι ομαλή στο $t\in[0,1]$ (για να δείτε το λόγο σχεδιάστέ την $\phi_n(t)$). Βλέπετε ότι η συνάρτηση όριο δεν είναι ούτε συνεχής ούτε παραγωγίσιμη συνάρτηση. Εξετάστε επίσης την περιπτώση $\phi_n(t)=nt/(1+n^2t^2)$.

$f(\phi_n(t)) \to f(\phi(t))$ και επιπλέον η ομοιόμορφη (ομαλή) σύγκλιση της $\phi_n(t)$ στο $\phi(t)$ εξασφαλίζει ότι

$$\int_0^t f(\phi_n(s))ds \to \int_0^t f(\phi(s))ds$$

Συνεπώς λαμβάνοντας το όριο στην (1) καταλήγουμε οτι η $\phi(t)$ ικανοποιεί την

$$\phi(t) = x_0 + \int_0^t f(\phi(s))ds \ \ , \tag{2}$$

και συνεπώς είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \ \ , \ \ x(0) = x_0 \ .$$

Άσκηση : Κατασκευάστε μέσω της αναδρομικής σχέσης Picard τη λύση της $\dot{x} = ax$, $x(0) = x_0$ και τους πρώτους όρους της λύσης $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$. Συγκρίνετε με τα ακριβή αποτελέσματα.

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται ως εξής. Έστω ότι η $y(t)$ είναι μία άλλη λύση της (2), τότε θα ικανοποιεί την

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(y(s))ds \ \ .$$

$$\begin{aligned}
|\phi_n(t) - y(t)| &\leq \int_0^t |f(\phi_{n-1}(s)) - f(y(s))|ds \\
&\leq k\int_0^t |\phi_{n-1}(s) - y(s)|ds \\
&\leq k^2\int_0^t ds \int_0^s ds'|\phi_{n-2}(s') - y(s')|ds' \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\leq m\frac{(kt)^n}{n!}
\end{aligned}$$

όπου $m = \max|y(t) - x_0|$ στο διάστημα $[0, t]$. Συνεπώς στο όριο $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$|\phi(t) - y(t)| \leq 0$$

και άρα η λύση είναι μοναδική:

$$\phi(t) = y(t) \ .$$