Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωρης

Runge-Kutta

9 Μαρτίου 2016

1 Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης

Οι δύο πιο σύνηθεις μεθόδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος Euler και η μέθοδος Runge-Kutta.

Έστω ένα πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\dot{y} = f(y,t)\ , y(t_0) = y_0\ . \tag{1}$$

τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση του στους χρόνους $t = t_0 + n\delta$, όπου n ακέραιος και δ το βήμα της ολοκλήρωσης, ως εξής:

Μέθοδος Euler:

$$y(t_0+\delta) = y(t_0) + \delta\ f(y_0,t_0)\ , \tag{2}$$

ή

Μέθοδος Runke-Kutta

$$y(t_0+\delta) = y(t_0) + \delta\left(\frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}\right)\ , \tag{3}$$

όπου

$$k_1 = f(y_0,t_0)$$

$$k_2 = f(y_0 + k_1\delta/2, t_0+\delta/2)$$

$$k_3 = f(y_0 + k_2\delta/2, t_0+\delta/2)$$

$$k_4 = f(y_0 + k_3\delta, t_0+\delta)\ .$$

2 Πόσο λάθος κάνουμε;

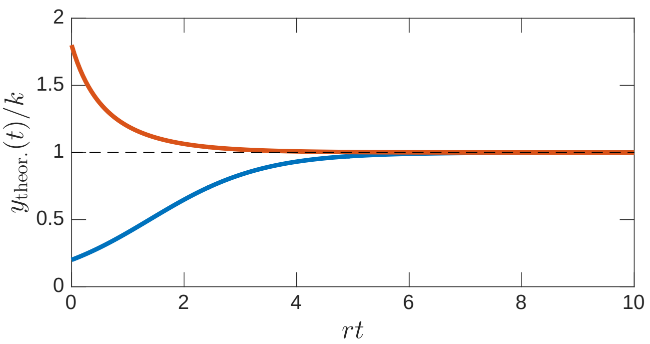
Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta και να την συγκρίνουμε με τη μέθοδο Euler. Για το σκοπό αυτό θα ολοκληρώσουμε τη λογιστική εξίσωση:

$$\dot{y} = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) \ , \ y(0) = y_0 \ . \tag{4}$$

Θέλουμε να δούμε πόσο «λάθος» μπορεί να αποφέρει η κάθε μέθοδος ολοκλήρωσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε και την ακριβή αναλυτική λύση η οποία είναι:

$$y_{\text{theor.}}(t) = \frac{y_0 k\, e^{rt}}{y_0(e^{rt} - 1) + k} \ . \tag{5}$$

(Επιβεβαιώστε ότι πράγματι η (5) ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (4).)



Σχήμα 1: Γράφημα της αναλυτικής λύσης (5) με παραμέτρους $r = 0.5$ και $k = 5$ για δύο διαφορετικές αρχικές τιμές: $y_0/k = 0.2 < 1$ και $y_0/k = 1.8 > 1$.

Για να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους θα ολοκληρώσουμε και με τις δύο την εξίσωση μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t = T$, και έπειτα θα συγκρίνουμε πόσο διαφορετικά αποτελέσματα μας δίνει η κάθε μέθοδος σε σχέση με την ακριβή αναλυτική λύση που έχουμε στη διάθεσή μας.

Χωρίζουμε το διάστημα $[0, T]$ σε N ίσα υποδιαστήματα (χρησιμοποιώντας άρα $N+1$ σημεία). Έτσι έχουμε τη διακριτοποίηση του συνεχούς διαστήματος $[0, T]$ σε:

$$[0, T] \quad \rightarrow \quad 0 = t_1, t_2, \ldots, t_N, t_{N+1} = T \ ,$$

όπου $\delta = t_j - t_{j-1}$ το μήκος του κάθε υποδιαστήματος. Το μήκος δ σχετίζεται με τον αριθμό των διαστημάτων, N, μέσω της σχέσης:

$$\delta = \frac{T}{N} \, . \tag{6}$$

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση (4) με τις μεθόδους Euler και Runge-Kutta και έτσι υπολογίζουμε τις τιμές $y_{\text{Euler}}(T)$ και $y_{\text{R-K}}(T)$.

Κρατώντας σταθερή την τελική χρονική στιγμή T μεταβάλλουμε τον αριθμό των διαστημάτων, και άρα επομένως και το μήκος δ, και κάθε φορά υπολογίζουμε τις διαφορές:

$$\begin{aligned} Er_1(N) &= |y_{\text{theor.}}(T) - y_{\text{Euler}}(T)| \\ Er_2(N) &= |y_{\text{theor.}}(T) - y_{\text{R.K.}}(T)| \end{aligned}$$

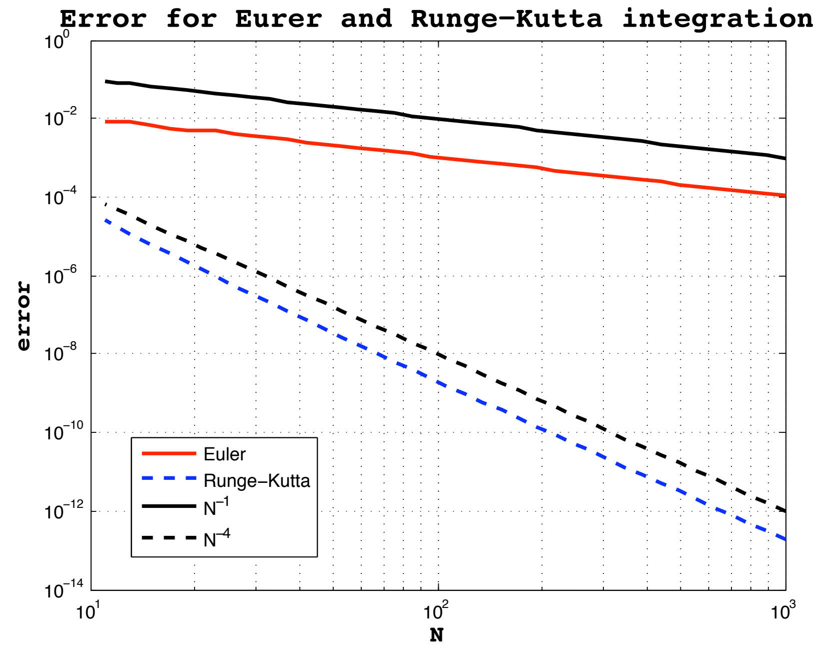
Παίρνουμε τιμές του N από 10 έως 10^3 (ακέραιες) και σχεδιάζουμε σε λογαριθμική κλίμακα, στο γράφημα (2), τις γραφικές παραστάσεις $Er_1(N), Er_2(N), N^{-1}$ και N^{-4} συναρτήσει του N. Φαίνεται καθαρότατα με το γράφημα αυτό ότι το λάθος της μεθόδου Euler πάει σαν N^{-1} ενώ της Runge-Kutta σαν N^{-4}.

Μπορούμε τις ίδιες σχέσεις να τις σχεδιάσουμε συναρτήσει του διαστήματος δ. Σχεδιάζουμε λοιπόν στο γράφημα (3), πάλι σε λογαριθμική κλίμακα, τις γραφικές παραστάσεις $Er_1(\delta), Er_2(\delta)$, δ και δ^4 συναρτήσει του δ. Είναι ολοκάθαρο πλέον αυτό που ισχυριστήκαμε στην τάξη ότι η μέθοδος Euler συγκλίνει σαν δ ενώ η Runge-Kutta σαν δ^4.

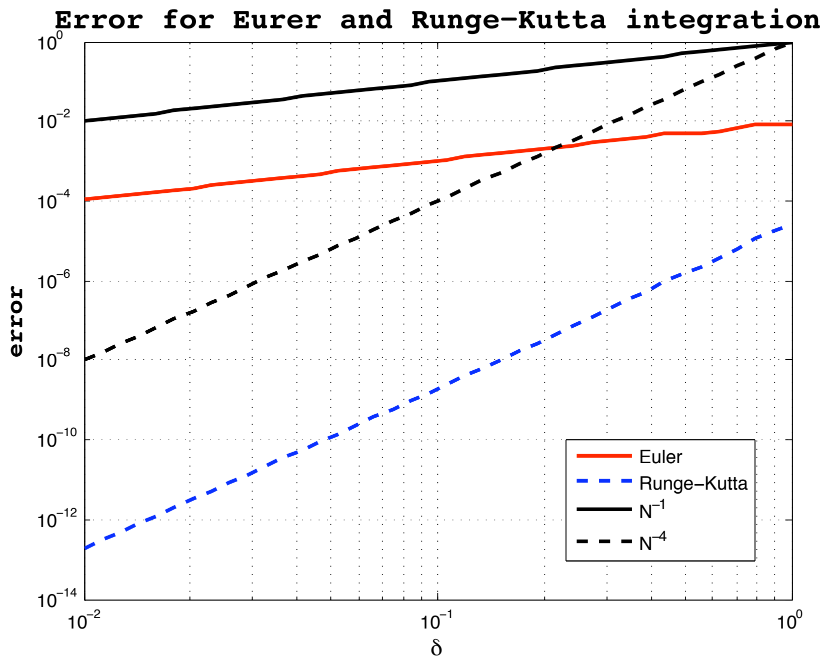
Σημείωση Συνηθίζεται να λέμε ότι η μέθοδος ολοκλήρωσης Euler έχει ακρίβεια *πρώτης τάξης* ενώ η μέθοδος Runge-Kutta έχει ακρίβεια *τετάρτης τάξης*. Ουσιαστικά σε κάθε χρόνικό βήμα, δ, το λάθος που κάνουμε είναι τάξεως δ^2 ή δ^5 αντίστοιχα. Για να φτάσουμε όμως μέχρι τη χρονική στιγμή T χρειαζόμαστε T/δ βήματα άρα το ολικό λάθος είναι

$$\begin{aligned} &\frac{T}{\delta} \times \delta^2 \sim \mathcal{O}(\delta) \quad \text{για την Euler} \\ &\frac{T}{\delta} \times \delta^5 \sim \mathcal{O}(\delta^4) \quad \text{για την Runge-Kutta} \end{aligned}$$

Άσκηση Προσπαθήστε να αναπαραγάγετε μόνοι σας τα γραφήματα αυτά. Αν θέλετε μπορείτε αντί την λογιστική εξίσωση (4) να χρησιμοποιήσετε την $\dot{y} = 1 + y^2$, $y(0) = 0$, η οποία έχει αναλυτική λύση $y_{\text{theor.}}(t) = \tan t$ για $t \in [0, \pi/2)$.



Σχήμα 2: Γράφημα του λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης με παραμέτρους $r = 0.5$ και $k = 5$ για τελικό χρόνο μέχρι $T = 10$ σαν συνάρτηση του πλήθους των σημείων της ολοκλήρωσης, N.



Σχήμα 3: Γράφημα του λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης με παραμέτρους $r = 0.5$ και $k = 5$ για τελικό χρόνο μέχρι $= 10$ σαν συνάρτηση του χρονικού διαστήματος της ολοκλήρωσης, δ.