



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα
6 Απριλίου 2016

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Θεωρήστε το ακόλουθο δισδιάστατο δυναμικό σύστημα που αποτελείται από ένα γραμμικό όρο και ένα μη γραμμικό:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \|x\| Bx ,$$

με

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & 10 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1)$$

και $\|x\| = \sqrt{x^\dagger x} \equiv \sqrt{x_1^* x_1 + x_2^* x_2}$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο της κατάστασης $x = [x_1, x_2]^T$. Θεωρούμε ότι η ενέργεια του συστήματος είναι η $E = \|x\|^2 \equiv x^\dagger x$. Η παράμετρος ε προσδιορίζει το μέγεθος του μη γραμμικού όρου $N(x) = \|x\| Bx$. Το σημείο $(0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας της γραμμικής δυναμικής. Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τη λεκάνη έλξεως του σημείου αυτού αν ληφθούν υπόψη και οι μη γραμμικοί όροι. Δηλαδή να προσδιορίσουμε τις αρχικές ενέργειες για τις οποίες είμαστε δέσμιοι του σημείου ισορροπίας και καταλήγουμε στο σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ και τη κρίσιμη αρχική ενέργεια που οδηγεί σε “ανάφλεξη” του συστήματος και μετάβαση σε άλλο ελκυστή.

1. Δείξτε ότι στην εξέλιξη της ενέργειας E δεν συμβάλλει ο μη γραμμικός όρος. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της ενέργειας γίνεται μόνο μέσω γραμμικών διαδικασιών. (Αυτή είναι γενική ιδιότητα όλων των ρευστών).

2. Σχεδιάστε τις ισοϋψείς του μέτρου του γραμμικού όρου $\|N(x)\|$.

Θεωρήστε τώρα μόνο τη γραμμική δυναμική ($\varepsilon = 0$).

3. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της δυναμικής αυτής. Αρχικά το σύστημα βρίσκεται στη ιδιοκατάσταση που θα κυριαρχήσει σε μεγάλους χρόνους. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας αυτής της κατάστασης αν αρχικά είχε ενέργεια $E_0 = 1$ καθώς και τη τροχιά της εξέλιξης της κατάστασης στο επίπεδο (x_1, x_2) .

4. Προσδιορίστε τώρα την αρχική κατάσταση που διεγείρει το περισσότερο την ιδιοκατάσταση που θα κυριαρχήσει σε μεγάλους χρόνους. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας αυτής της αρχικής κατάστασης αν αρχικά είχε και αυτή ενέργεια $E_0 = 1$ καθώς και τη τροχιά της εξέλιξης της κατάστασης στο επίπεδο (x_1, x_2) .

5. Προσδιορίστε τώρα την αρχική κατάσταση που οδηγεί σε μέγιστο αρχικό ρυθμό αύξησης της ενέργειας δηλαδή την αρχική κατάσταση που μεγιστοποιεί την $E_0^{-1}dE/dt$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας αυτής της αρχικής κατάστασης αν αρχικά είχε και αυτή ενέργεια $E_0 = 1$ καθώς και τη τροχιά της κατάστασης στο επίπεδο (x_1, x_2) .

6. Ο λόγος της ενέργειας τη χρονική στιγμή t ως προς την αρχική ενέργεια είναι:

$$\frac{E(t)}{E_0} = \frac{\|x(t)\|^2}{\|x_0\|^2} = \frac{x_0^\dagger \Phi x_0}{x_0^\dagger x_0}.$$

όπου $\Phi = e^{A^\dagger t} e^{At}$. Σχεδιάστε τη μέγιστη τιμή του λόγου αυτού ως προς όλες τις αρχικές συνθήκες

$$G(t) = \max_{x_0} \left(\frac{E(t)}{E_0} \right),$$

συναρτήσει του χρόνου (σχεδιάστε την στο διάγραμμα του ερ. 4). Ποία η μέγιστη τιμή του $G(t)$ και σε τι χρόνο t πραγματοποιείται. Ποία η αρχική συνθήκη που οδηγεί σε αυτή τη μέγιστη αύξηση της ενέργειας. Συγκρίνατε την με την αρχική συνθήκη του ερ. 4.

Επαναφέρατε τώρα μόνο τη μη γραμμική δυναμική με $\varepsilon = 1$. Θα απαιτηθούν τώρα πολλές αριθμητικές ολοκληρώσεις του μη γραμμικού συστήματος.

7. Εκτιμήστε τη κρίσιμη ενέργεια E_c των αρχικών διαταραχών του τύπου του ερωτήματος 3 που οδηγεί σε “ανάφλεξη” του συστήματος δηλαδή τη κρίσιμη αρχική ενέργεια διαταραχών τύπου ερ. 3 με την οποία το σύστημα αποχωρίζεται για πάντα το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας για τιμές E_0 λίγο μικρότερες και μεγαλύτερες από το E_c .

8. Εκτιμήστε τη κρίσιμη ενέργεια E_c των αρχικών διαταραχών του τύπου του ερωτήματος 4 ή 6 που οδηγεί σε “ανάφλεξη” του συστήματος δηλαδή τη κρίσιμη αρχική ενέργεια διαταραχών τύπου ερ. 4 ή ερ. 6 με την οποία το σύστημα αποχωρίζεται για πάντα το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας για τιμές E_0 λίγο μικρότερες και μεγαλύτερες από το E_c .

8. Αν U είναι ο πίνακας το ιδιοκαταστάσεων του A διατυπώστε τη δυναμική του μη γραμμικού συστήματος με μεταβλητή την $y = U^{-1}x$. Τώρα πώς θα αποφασίσετε ποία αρχική διαταραχή είναι η καλύτερη για την “ανάφλεξη”. Το γραμμικό σύστημα τι προτείνει; Σχεδιάστε στο επίπεδο (y_1, y_2) τις ισοϋψείς του μη γραμμικού όρου. Από το σχήμα των ισοϋψών αυτών μπορείτε να προτείνετε ποία αρχική κατάσταση είναι πλέον επικίνδυνη για να διαφύγουμε από το το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$;