Διάγραμμα διακλάδωσης χρονοεξαρτημένης λογιστικής εξίσωσης

17 Μαρτίου 2016

Θα ασχοληθούμε με τη συμπεριφορά της λογιστικής εξίσωσης με χρονοεξαρτώμενη αλίευση:

$$\dot{x} = x(1-x) - \alpha\left[1 + \epsilon\sin(2\pi t)\right] \ , \ \text{με} \ x, \ \alpha, \ \epsilon \geq 0 \ . \tag{1}$$

Οταν η αλίευση είναι χρονοανεξάρτητη ($\epsilon = 0$) τα σημεία ισορροπίας είναι τα:

$$x_e^{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} \ .$$

Συνεπώς όταν $\alpha < 1/4$ υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας και ο πληθυσμός των ψαριών θα ισορροπίσει στην τιμή $x_e^+(\alpha)$, εκτός αν αρχικά $x(0) < x_e^-(\alpha)$, οπότε θα εξαφανισθεί. Στη τιμή $\alpha = 1/4$ γίνεται διακλάδωση και για $\alpha > 1/4$ δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας και ο πληθυσμός αφανίζεται.

Ερώτημα 1: Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης με παράμετρο α.

Η εξίσωση αυτή είναι χρονοεξαρτώμενη (μη αυτόνομη). Ο αλγόριθμος RK4 για την ολοκλήρωση εξισώσεων της μορφής $\dot{x} = f(x,t)$ είναι:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, t_n) \\
k_2 &= f(x_n + \delta k_1/2, t_n + \delta/2) \\
k_3 &= f(x_n + \delta k_2/2, t_n + \delta/2) \\
k_4 &= f(x_n + \delta k_3, t_n + \delta) \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{\delta}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \ ,
\end{aligned}$$

όπου $x_n \equiv x(t_n)$, $x_{n+1} \equiv x(t_{n+1})$ και $t_{n+1} = t_n + \delta$.

Κατασκευάστε και δοκιμάστε ένα πρόγραμμα το οποίο εκτελεί αριθμητική ολοκλήρωση της (1). Ακολουθείστε τα εξής βήματα:

1. Κατασκευάστε μια συνάρτηση π.χ. την `xdot1dtime`(x,t) που να σας δίνει τη τιμή $\dot{x}$ της σχέσης (1) συναρτήσει των το x και t . Θα πρέπει να δέχεται global παραμέτρους το a και ϵ. Το ϵ θα παίρνει τις τιμές 0 ή 1 για να ρυθμίζετε αν θα έχει ή όχι χρονοεξάρτηση η αλίευση.

2. Βεβαιωθείτε ότι η συνάρτηση δουλεύει σχεδιάζοντας το $\dot{x}$ σαν συνάρτηση του x με $a = t = \epsilon = 0$. Παίρνετε τη γνωστή παραβολή; Σχεδιάστε τώρα το $\dot{x}$ σαν συνάρτηση του t για $x = 0$, $a = \epsilon = 1$. Παίρνετε το ημίτονο με περίοδο 1 που ταλαντώνεται γύρω από την τιμή $\dot{x} = 1$;

3. Αρχίστε χωρίς χρονοεξάρτηση ($\epsilon = 0$) και ρυθμό αλίευσης $\alpha = 0.1$ και αρχικούς πληθυσμούς

ψαριών $x(0) = 0.15, 0.5, 1.5$. Ολοκληρώστε με τη μέθοδο Runge-Kutta μέχρι χρόνο $t_f = 15$ και σχεδιάστε την εξέλιξη του πληθυσμού συναρτήσει του χρόνου. Πόσο είναι τα $x_e^{\pm}(0.1)$; Για αυτές τις αρχικές συνθήκες ξέρουμε ότι η λύση πρέπει να καταλήξει στο $x_2 = x_e^+(0.1)$. Μάλιστα αν $x(0) < 1/2$ η εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών έχει τη σιγμοειδή μορφή που συζητούσαμε στην τάξη και η οποία παύει να είναι σιγμοειδής όταν $x(0) > 1/2$. Το πετυχαίνεται αυτό; Μπορείτε να σχεδιάζετε την ευθεία $x = x_2$ μαζί με την τροχιά που υπολογίζετε για να δείτε πόσο την πλησιάζει. Αυτό γίνεται για παράδειγμα ως:

```
figure(1)
plot(t,x) % η τροχια
x1 = 1/2 - sqrt(1/4-alpha); x2 = 1/2 + sqrt(1/4-alpha);
hold on;plot([0 tf],[x2 x2]);hold off;
% χρησιμοποιούμε hold on για να μην σβήσει τα προηγούμενα
```

4. Αν αρχίσετε με $x(0) < x_1 = x_e^-(0.1)$ πού πάει η λύση; Απ. πάει στο $x \to -\infty$. Δεδομένου ότι αυτή η εξίσωση περιγράφει πληθυσμούς δεν έχει νόημα για $x < 0$. Προσθέστε μετά το βήμα της RK4 μια γραμμή η οποία να ελέγχει αν η νέα τιμή για το x που υπολόγισε είναι αρνητική. Σε τέτοια περίπτωση τότε να την θέτετε ίση με μηδέν. Π.χ.:

```
x(it) = x(it-1) + ... ; %το βήμα της RK4
if x(it)<0
    x(it)=0;
end
```

   Επαναλάβετε τώρα το πείραμα με $a = 0.1, \epsilon = 0$ και $x(0) < x_1$. Δίξαμε ότι για $a \geq 1/4$ δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας και ότι ο πληθυσμός των ψαριών θα αφανισθεί. Επιβεβαιώνεται αυτό από την αριθμητική σας ολοκλήρωση; Σχεδιάστε την εξέλιξη. Τώρα πρέπει να έχετε ένα κώδικα που δουλεύει σωστά τουλάχιστον για $\epsilon = 0$.

5. Βάλτε τώρα στο πρόβλημα χρονοεξάρτηση, $\epsilon = 1$ και $a = 0.1$. Τι γίνεται όταν αρχίζεται με $x(0) < x_e^-(\alpha)$ και τι γίνεται όταν $x(0) > x_e^-(\alpha)$. Πηγαίνει η λύση πάλι στο $x = x_e^+(\alpha)$;

Ερώτημα 2: Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάστε τις καμπύλες εξέλιξης του πληθυσμού για $\alpha = 0.1$ και $\epsilon = 1$ και $t_f = 15$ για αρχικές τιμές $x(0) = 0.2, 1.5$. Σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα την $x = x_e^+(\alpha)$.

Κατασκευή απεικόνισης μιας περίοδου για $\epsilon = 1$

Η (1) έχει περίοδο $T = 1$. Ορίζουμε την απεικόνιση Poincare μίας περιόδου, $p(x, \alpha)$. Η τιμή $x(t)$ στην οποία καταλήγει το χρόνο t η αρχική τιμή $x(0)$ εξελισσόμενη σύμφωνα με την (1) είναι, λόγω της μοναδικότητας των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης, συνάρτηση της αρχικής τιμής $x(0)$, του χρόνου t και του α, δηλαδή είναι $x(t) = f(x(0), t, \alpha)$. Μάλιστα η $f(x(0), t, \alpha)$ είναι μία συνεχής και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση των $x(0), t$ και α. Η συνάρτηση Poincare είναι η $p(x, \alpha) = f(x, t = 1, \alpha)$ δηλαδή είναι η τιμή του πληθυσμού μετά από μία περίοδο $t = 1$, αν την αρχική στιγμή $t = 0$, ο πληθυσμός ήταν $x(0) = x$.

Ερώτημα 3: Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάστε τις καμπύλες εξέλιξης του πληθυσμού για $\alpha = 1/8$ και $\epsilon = 1$ και $t_f = 1$ και για 10 αρχικές τιμές στο διάστημα $[0, 2]$.

Ερώτημα 4: Τώρα λάβετε 100 τιμές στο διάστημα $[0, 2]$ και σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τη συνάρτηση Poincare $p(x, \alpha)$ για τις τιμές $\alpha = 1/8, 1/4, 3/8$, καθώς και τη συνάρτηση $f(x) = x$. Εξετάστε τη συμπεριφορά του χρονοεξαρτημένου συστήματος. Παρουσιάζει τα ίδια χαρακτηριστικά διακλάδωσης το σύστημα όταν δεν υπάρχει χρονοεξάρτηση;