ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

20 Απριλίου 2016

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Εστω το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}_i = f_i(x,t) \ , \ \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ . \tag{1}$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την αρχική συνθήκη ενέργειας $E = x_i(0)x_i(0)$ (χρησιμοποιούμε αθροιστική σύμβαση) η οποία μεγιστοποιεί στο χρόνο T την

$$G(T, \mathbf{x}(0)) = \max_{\mathbf{x}(0)} \frac{x_i(T)x_i(T)}{x_i(0)x_i(0)} \ . \tag{2}$$

Η μέγιστη αυτή συνάρτηση $G(T, \mathbf{x}(0))$ είναι συνάρτηση του τελικού χρόνου T και της αρχικής συνθήκης $\mathbf{x}(0)$. Όμως, αν η (1) είναι γραμμική τότε η $G(T, \mathbf{x}(0))$ δεν εξαρτάται από την αρχική ενέργεια, E. Μάλιστα η συμβολή στη δυναμική των μη γραμμικών διαδικασίων φαίνεται από την εξάρτηση της $G(T, \mathbf{x}(0))$ από την αρχική ενέργεια.

Ο Pontryagin το 1956 ακολουθώντας τα βήματα του Lagrange παρατήρησε ότι η στασιμοποίηση της (2), υπό τη προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η (1), επιτυγχάνεται ισοδύναμα με στασιμοποίηση της "δράσης":

$$S(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_0, \lambda, \mu) = \frac{x_i(T)x_i(T)}{x_{i0}x_{i0}} - \int_0^t \lambda_i(t)(\dot{x}_i - f_i(x))dt \ - \mu_i(x_i(0) - x_{i0}) \ , \tag{3}$$

ως προς τις συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $x_i(t)$ στο διάστημα $[0, T]$ (χωρίς άλλη απαίτηση), την αρχική κατάσταση x_{i0}, τους πολλαπλασιαστές Lagrange $\lambda_i(t)$ (που ειναι και αυτοί συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο ίδιο διάστημα) και τέλος τα μ_i.

Η στασιμοποίηση ως προς τους πολλαπλασιαστές Lagrange $\lambda_i(t)$ απαιτεί η $\mathbf{x}(t)$ να επιλύει για $t \in [0, T]$ την (1):

$$\dot{x}_i = f_i(x,t) \ , \tag{4}$$

και η στασιμοποίηση ως πρός μ_i ότι οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$x_i(0) = x_{i0} \ . \tag{5}$$

Το ενδιαφέρον είναι το επόμενο βήμα του Pontryagin: απαιτεί να στασιμοποιείται η δράση και ως προς μεταβολές της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$ (σκεφθείτε γιατί το απαιτεί αυτό). Για να το πετύχουμε αυτό παραγώγιζουμε κατά μέρη την

$$\int_0^T \lambda_i(t)(\dot{x}_i - f_i(x))dt = \lambda_i(T)x_i(T) - \lambda(0)x_i(0) - \int_0^T (x_i\dot{\lambda}_i + f_i(x)\lambda_i)dt$$

οπότε αν κάνουμε μεταβολή $\eta_i(t)$ στη τροχιά $\mathbf{x}(t)$ τότε η μεταβολή στο παραπάνω ολοκλήρωμα είναι:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(T)\eta_i(T) - \lambda(0)\eta_i(0) - \int_0^T \left(\eta_i \dot{\lambda}_i + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_e(t)} \eta_j \lambda_i \right) dt = \\
&= \lambda_i(T)\eta_i(T) - \lambda(0)\eta_i(0) - \int_0^T \eta_i \left(\dot{\lambda}_i + \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{x_e(t)} \lambda_j \right) dt \\
&= \lambda_i(T)\eta_i(T) - \lambda(0)\eta_i(0) - \int_0^T \eta_i \left(\dot{\lambda}_i + (L^T)_{ij}(t)\lambda_j \right) dt
\end{aligned}$$

όπου

$$L_{ij}(t) \equiv \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_e(t)} .$$

Συνεπώς η συνολική μεταβολή της δράσης σε μεταβολές της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$ είναι:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{2x_i(T)\eta_i(T)}{x_{i0}x_{i0}} - \lambda_i(T)\eta_i(T) + \lambda_i(0)\eta_i(0) + \int_0^T \eta_i \left(\dot{\lambda}_i + L^T_{ij}(t)\lambda_j \right) dt - \mu_i \eta_i(0) \\
&= \left(\frac{2x_i(T)}{x_{i0}x_{i0}} - \lambda_i(T) \right) \eta_i(T) + (\lambda_i(0) - \mu_i)\eta_i(0) + \int_0^T \eta_i \left(\dot{\lambda}_i + L^T_{ij}(t)\lambda_j \right) dt \ ,
\end{aligned}$$

και καθίσταται στάσιμη αν οι πολλαπλασιαστές Lagrange ικανοποιούν την ακόλουθη συζυγή δυναμική:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i &= -(L^T)_{ij}\lambda_j \ , && (6)\\
\lambda_i(T) &= \frac{2x_i(T)}{x_{i0}x_{i0}} \ , && (7)\\
\mu_i &= \lambda_i(0) \ . && (8)
\end{aligned}$$

Έχοντας στασιμοποιήσει τη δράση ως προς τη τροχιά, και τους πολλαπλασιαστές τώρα υπολογίζουμε τη μεταβολή της δράσης ως προς τις αρχικές συνθήκες. Για τις τροχιές που ικανοποιούν τις (4), (5), (6), (7) και (8), η πρώτης τάξης μεταβολή της δράσης είναι:

$$\delta S = \left(2\frac{||x(T)||^2}{||x_0||^4} x_{i0} + \mu_i \right) \delta x_{i0} \ .$$

και συνεπώς κάνοντας χρήση της (8) προσδιορίζουμε τη βαθμίδα της δράσης ως προς τις αρχικές συνθήκες:

$$\frac{\partial S}{\partial x_{i0}} = 2\frac{||x(T)||^2}{||x_0||^4} x_{i0} + \lambda_i(0) \ . \qquad (9)$$

Πόσες ολοκληρώσεις της (1) θα απαιτούνταν για τον κατευθείαν προσδιορισμό της βαμίδας $\nabla_{\mathbf{x}(0)} S$; Με τη μέθοδο του Pontryagin με πόσες ολοκληρώσεις επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός της $\nabla_{\mathbf{x}(0)} S$;

Στο στάσιμο σημείο η βαθμίδα (9) μηδενίζεται. Αλλά πως μπορούμε να εντοπίσουμε το σημείο αυτό; Θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε κάποιο μέγιστο της δράσης σκεπτόμενοι ως εξής: Αρχίζουμε από κάποια αρχική συνθήκη x_{i0} ενέργειας E και υπολογίζουμε την τροχιά $\mathbf{x}(t)$ λύνοντας την (4) με αρχική συνθήκη (5) από $t = 0$ σε $t = T$. Κρατάμε την τροχιά $\mathbf{x}(t)$ για να μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $\mathbf{L}(t)$ ο οποίος εξαρτάται απο τη τροχιά. Έπειτα υπολογίζουμε τα $\lambda(t)$ ολοκληρώνοντας την (7) ανάποδα στο χρόνο εξελίσσοντας το $\lambda(t)$ από $t = T$ σε $t = 0$ με αρχική τιμή $\lambda(T)$ την (8). Προσδιορίζεται έτσι το $\lambda(0)$ καθώς επίσης για την επιλεγείσα αρχική συνθήκη x_{i0} η βαθμίδα της δράσης (9). Η βαθμίδα αυτή μας αποκαλύπτει τη διεύθυνση στην οποία πρέπει να κινηθούμε για να μεγαλώσει η δράση. Φανταστείτε ότι είσαστε σε ένα βουνό το βράδυ, θέλετε να φτάσετε σε κάποια κορυφή και η μόνη πληροφορία που σας μεταδίδεται ανά πάσα στιγμή είναι η διεύθυνση της βαθμίδας του ύψους του βουνού. Τι θα κάνετε για να φτάσετε στη κορυφή; Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα οδηγεί ότι η βέλτιστη επόμενη αρχική συνθήκη για να φτάσετε σε κάποιο μέγιστο είναι η

$$x'_{i0} = x_{i0} + h\frac{\partial S}{\partial x_{i0}} \ , \tag{10}$$

για ένα κατάλληλο h, και αφού κανονικοποίησουμε την νέα αρχική συνθήκη να έχει και αυτή ενέργεια E, συνεχίζετε επαναλαμβάνοντας τη ίδια διαδικασία με τη νέα αρχική συνθήκη την πορεία σας προς το μέγιστο. Πρέπει να προσέξετε να μην πάρετε πολύ μεγάλο h γιατί τότε μπορούν να γίνουν παλινδρομήσεις, αφού μπορείτε να υπερκεράσετε σε ένα βήμα την κορυφή. Αν αρχίσουν οι παλινδρομήσεις ξέρετε τουλάχιστον ότι είστε κοντά σε ένα στάσιμο σημείο και μπορείτε να μειώσετε το βήμα. Από την άλλη δεν θέλετε να είσαστε υπερσυντηρητικοί επιλέγοντας τόσο πολύ μικρό βήμα με το οποίο δεν θα πάτε πουθενά τουλάχιστον σε αυτή τη ζωή.

Μία παρατήρηση:

Ενώ η δυναμική εξέλιξης του $\mathbf{x}$ είναι γενικά μη γραμμική, η εξέλιξη του λ διέπεται πάντα από γραμμική εξίσωση με πίνακα εξέλιξης τον $-\mathbf{L}^T$ που είναι στη γενική περίπτωση χρονοεξαρτώμενος. Στην περίπτωση όμως που η δυναμική του $\mathbf{x}$ είναι γραμμική και $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{A}$, και η γραμμική δυναμική του λ διέπεται τότε από χρονοανεξάρτητο πίνακα και δεν χρειάζομαστε να αποθηκεύουμε τη τροχιά $\mathbf{x}(t)$ για τον υπολογισμό του $\mathbf{L}$ για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το $\lambda(0)$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε γιατί είναι ορθή η παραπάνω παρατήρηση.

Θα ασκηθούμε ακολουθώντας τον Pontryagin για να βρούμε την αρχική διαταραχή που μεγιστοποιεί την G για το ακόλουθο δυναμικό σύστημα:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varepsilon||\mathbf{x}||\mathbf{B}\mathbf{x} \ , \tag{11}$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.1 & 10 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{12}$$

Το $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}} \equiv \sqrt{x_1^* x_1 + x_2^* x_2}$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο της κατάστασης $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$.

1. Κάντε ένα διάγραμμα για $\varepsilon = 0$ στο οποίο για κάθε $\mathbf{x}(0)$ σημειώνετε την βαθμίδα $\nabla_{\mathbf{x}(0)} S$ για $T = 15$. Π.χ. αν πάρω τις 21×23 αρχικές συνθήκες $x1 = linspace(-1, 1, 21)$, $x2 = linspace(-1, 1, 23)$ και υπολογίσω για τη καθεμία αρχική συνθήκη τις συντεταγμένες της βαθμίδας $\nabla_{\mathbf{x}(0)} S$ τις οποίες συμβολίζω $(dS1, dS2)$ όπου τα $dS1$ και $dS2$ είναι 21×23 πίνακες τότε σχεδιάζω το διανυσματικό πεδίο με την εντολή quiver(X1,X2,dS1,dS2,1.5) όπου $[X1, X2] = meshgrid(x1, x2)$, δηλαδή τα $X1$ ή $X2$ είναι οι συντεταγμένες του $x1$ ή $x2$ στο καρτεσιανό επίπεδο $(x1, x2)$. Το 1.5 στην εντολή quiver ελέγχει το μέγεθος του βέλους του διανυσματικού πεδίου. Βεβαίως επειδή το σύστημα είναι γραμμικό το διάγραμμα αυτό μπορείν να γίνει με πολύ πιο οικονομικό τρόπο υπολογίζοντας τη βαθμίδα για διαταραχές μόνο μίας ορισμένης ενέργειας. Από το διάγραμμα αυτό μπορείτε να εντοπίσετε που αναμένετε να είναι τα στάσιμα σημεία της G;

2. Τώρα αρχίστε από μία αρχική συνθήκη και ακολουθώντας τον αλγόριθμο της μέγιστης κλίσης (10), προσδιορίστε την αρχική κατάσταση που μεγιστοποιεί G. Σημειώστε στο προηγούμενο διάγραμμα την πορεία που ακολουθείτε προς το μέγιστο.

3. (Πιο απαιτητικό-προαιρετικό) Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα όταν $\varepsilon = 1$ και $E = 1$.

4. (Προαιρετικό) Συγκρίνατε την εξέλιξη της ενέργειας στο διάστημα $[0, 100]$ του (11) με $\varepsilon = 1$ με αρχικές συνθήκες τις διαταραχές που προσδιορίσατε στο ερώτημα (1) και (3) με αρχική ενέργεια $E = 1$.