

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Παράδοση 26 Μαΐου 2015

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Τέσσερις τρόποι υπολογισμού της ευστάθειας του οριακού κύκλου του δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = y + \epsilon x(1 - x^2 - y^2) \quad , \quad \dot{y} = -x + \epsilon y(1 - x^2 - y^2) .$$

1. Πρώτος τρόπος. Γράψτε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Προσδιορίστε τον οριακό κύκλο και από τη πολική μορφή του δείξτε ότι ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής (ασταθής) με εκθέτη Lyapunov $\lambda = -2\epsilon$.
2. Δεύτερος τρόπος. Προσδιορίστε την απεικόνιση Poincaré των διαδοχικών τομών της τροχιάς με τη διατέμνουσα $y = 0$, $x > 0$ ($\theta = 0$). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εύκολα στη περίπτωση αυτή επιλύοντας για την εξέλιξη του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες. Σχεδιάστε την απεικόνιση Poincaré, προσδιορίστε τον οριακό κύκλο και την ευστάθειά του. Δείξτε ότι καταλήγετε και πάλι στον ίδιο εκθέτη Lyapunov.

Εργαστείτε στο αρχικό σύστημα με μεταβλητές (x, y) και προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση του Ιακωβιανού πίνακα $A(t)$ που διέπει τη δυναμική των διαταραχών γύρω από την περιοδική τροχιά. (Υπ.: Προσέξτε να παραμετρήσετε την τροχιά έτσι ώστε να αντιστοιχεί στη σωστή φορά της κίνησης.)

3. Τρίτος τρόπος. Υπολογίστε αριθμητικά τώρα τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(T)$ που αντιστοιχεί στον $A(t)$ για $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.5$, και $\epsilon = 1$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του διαδότη μίας περιόδου. Επιβεβαιώστε ότι η μία είναι (κατά πολύ καλή προσέγγιση) 1 και η άλλη έχει απόλυτη τιμή $\exp(-2\epsilon T)$ όπου T η περίοδος της κίνησης. Συνεπώς επιβεβαιώνεται και πάλι ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι

$$\lambda = \frac{\log(\exp(-2\epsilon T))}{T} = -2\epsilon .$$

4. Τέταρτος τρόπος. Υπολογίστε το $\exp(\int_0^T \text{trace}(A(t')) dt')$ όπου T η περίοδος της κίνησης και επιβεβαιώστε ότι αυτό είναι ίσο με τα $\det(\Phi(T))$ που υπολογίσατε προηγουμένως και ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T \text{trace}(A(t')) dt' = -2\epsilon .$$

(Την πρόταση αυτή θα την αποδείξω στην τάξη. Εσείς απλώς να την επιβεβαιώσετε.)