

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα Παράδοση 21 Απριλίου 2015

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Άσκηση 1 (βασισμένη στην 3.5.6 του Strogatz)

Σώμα κινείται σύμφωνα με το νόμο:

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 0, \quad (1)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$.

1. Προσδιορίστε την τροχιά $x(t)$ για $\epsilon > 0$.
2. Υποθέστε τώρα ότι $\epsilon \ll 1$. Δείξτε ότι η εξέλιξη της κίνησης εξαρτάται από δύο χρονικές κλίμακες $\tau_1 \ll \tau_2$ και εκτιμήστε αυτές τις κλίμακες κατά προσέγγιση.
3. Φτιάξτε ένα script για να σχεδιάζετε την χρονική εξέλιξη της $x(t)$ π.χ. για $\epsilon = 0.01, x_0 = 0, v_0 = 100$.
4. Σχεδιάστε τώρα 8 τροχιές (π.χ. για $x_0 = \pm 0.5, v_0 = \pm 10, x_0 = \pm 1, v_0 = \pm 10$) στο χώρο (x, v) . Σε αυτό το επίπεδο ποιά καμπύλη ακολουθούν όλες οι τροχιές μετά από κάποιο χρόνο. Σημειώστε με κόκκινο κύκλο σε ποιο σημείο του διαγράμματος βρίσκεται το σώμα μετά από χρόνο τ_1 .
5. Σχεδιάστε την $x(t)$ που ικανοποιεί την $\dot{x} + x = 0$ με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ συγκρίνοντας την εξέλιξη με αυτή της (1). Συγκρίνατε την εξέλιξη αν $x_0 = 0$. Μπορείτε να προτείνετε μία προσαρμογή της αρχικής συνθήκης της $\dot{x} + x = 0$ για να αποδίδεται καλύτερα η λύση της (1);
6. Ο δυναμικός αυτός νόμος περιγράφει ταλαντωτή σε υπεραπόσβεση. Προσδιορίστε αρχικές τιμές ώστε το σώμα να κάνει μία ταλάντωση. Μπορείτε να δώσετε πειστικό επιχείρημα για το ότι δεν μπορεί να κάνει και δεύτερη.

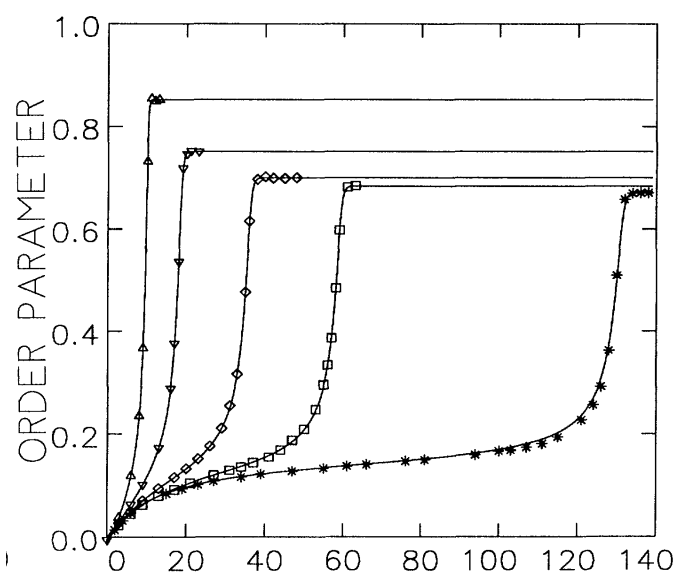
Άσκηση 2 (βασισμένη στην 3.5.6 του Strogatz και στην εργασία της Anneli Aitta, Phys. Rev Lett. 62, 2116, Phys. Rev. Lett. 54, 673)

Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

με δυναμικό $V = x^6/6 + \gamma x^4/4 - \epsilon x^2/2 + hx$, που περιγράφει κάποια αλλαγή φάσης.

1. Θεωρήστε πρώτα $h = 0, \epsilon = 0$. Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης συναρτήσει του γ .
2. Θεωρήστε τώρα $h = 0$ και $\epsilon = \epsilon_f$. Σχεδιάστε τα διαγράμματα διακλάδωσης συναρτήσει του γ για $\epsilon_f > 0$ και $\epsilon_f < 0$.
3. Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα όταν $h \neq 0$.
4. Η παράμετρος ϵ μεταβάλλεται και λαμβάνει τελικά κάποια θετική τιμή ϵ_f . Το σύστημα παρατηρείται να εξελίσσεται σύμφωνα με τη γραφική παράσταση (1). Για μικρές τιμές του ϵ_f εξελίσσεται πολύ αργά παραμένοντας για μεγάλο χρονικό διάστημα σε ένα οριζόντιο σημείο ισορροπίας, και απότομα μεταβαίνει σε άλλο σημείο ισορροπίας. Μπορείτε να εξηγήσετε τη μορφή της χρονικής εξέλιξης που φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 1: