



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού
27 Οκτωβρίου 2009

A. Θεωρήστε μια ελκτική κεντρική δύναμη της μορφής

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-\frac{k}{r^2} + f(r)\right)\hat{n}$$

η οποία δρα σε ένα σωματίδιο μάζας m . Υπολογίστε τη μορφή του \vec{A} όπου $\vec{A} = (\vec{p} \times \vec{L})/(km) - \hat{n}$. Τώρα γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει τη μεταβολή του \vec{A} δ \vec{A} , και επομένως την στροφή του άξονα της ελλειπτικής τροχιάς, σε διάστημα μιας περιόδου της τροχιάς (αυτής που θα έκανε το σωματίδιο αν $f(r) = 0$). [Θεωρήστε ότι $k/r^2 \gg |f(r)|$.]

B. Το δυναμικό που αντιστοιχεί στα σχετικιστικά φαινόμενα της καμπύλωσης του χωρόχρονου έχει τη μορφή

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}.$$

Υπολογίστε την μετάπτωση της τροχιάς ανά περίοδο που προκαλεί αυτό το φαινόμενο.

Γ. Υπολογίστε το δυναμικό εξαιτίας ενός στεφανιού ακτίνας R σε μεγάλη απόσταση $r \gg R$ από το κέντρο αυτού και επάνω στο επίπεδο του σταφανιού. [Εκτελέστε τους υπολογισμούς σας με ακρίβεια μέχρι (R^2/r^2) .] Τώρα θεωρώντας ότι μπορείτε να μοντελοποιήσετε έναν πεπλατυσμένο πλανήτη εξαιτίας ιδιοπεριστροφής με ένα σφαιρικό σώμα μάζας M συν μια στεφάνη ακτίνας όσο η σφαίρα και μάζας m ($m \ll M$) υπολογίστε το δυναμικό και τη δύναμη που ασκεί αυτό το σώμα σε μια σημειακή μάζα που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τον πλανήτη στο επίπεδο που βρίσκεται και η στεφάνη.

Δ. Εκτελέστε τους υπολογισμούς για να βρείτε την μετάπτωση του περιηλίου εξαιτίας της πρόσθεσης της στεφάνης στον σφαιρικό πλανήτη συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των A και Γ. [Θεωρήστε ότι η τροχιά σε μεγάλη προσέγγιση είναι αυτή εξαιτίας της σφαιρικής μάζας λόγω του ότι $m \ll M$.]

Ε. Καλείστε να ελέγξετε αν για τον Ερμή (βρείτε τα αστρονομικά του στοιχεία) η παρατηρούμενη μετάπτωση του περιηλίου των 43'' ανά αιώνα οφείλεται στην πλάτυνση του Ήλιου ή στη σχετικότητα. Ποιός ο λόγος των αντίστοιχων μαζών (στεφάνης:σφαίρας) m/M θα έπρεπε να έχει ο Ήλιος για να δικαιολογηθεί η παρατηρούμενη μετάπτωση; Θα ήταν λογική τέτοια πλάτυνση για περίοδο περιστροφής του Ήλιου τάξης 1 μήνα; [Πρέπει να σκεφθείτε ποια πλάτυνση θα περιμένατε να έχει ο Ήλιος εξαιτίας αυτής της περιστροφής (βλ. πρόβλημα 8/Κεφ. 6 του βιβλίου μας) και πώς από αυτήν θα εκτιμήσετε τον αντίστοιχο λόγο μαζών m/M .]