13/12/2005

Στην ιστοσελίδα θα μπουν για τα Χριστούγεννα 1 σετ ασκήσεων και 1 paper. Επίσης θα σημειωθούν κάποια κομμάτια από το Landau και κάποιες λυμένες ασκήσεις.

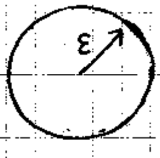
Έχουμε πει λοιπόν:

$$\sigma_{ij} = -(p_e - k\vec{\nabla}\vec{u})\delta_{ij} + 2\mu\Big(\underbrace{e_{ij} - \tfrac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}}_{\text{έχουμε αφαιρέσει το ίχνος}}\Big) \qquad (\mathrm{I})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

μ : shear viscosity ("εφαπτομενικό ιξώδες")
K : bulk viscosity ("κάθετο ιξώδες")

Τα K, μ δεν είναι αδιάστατα και αυτό μπορούμε να το δούμε από το ότι οι μονάδες του σ_{ij} είναι δύναμη/επιφάνεια ενώ του e_{ij} είναι $^1/$χρόνος. Τα K, μ είναι οι ποσότητες που μετριούνται πειραματικά και είναι $K, \mu > 0$ με $K > \mu$. Μηχανικά μετριέται η μέση κάθετη πίεση σε μια επιφάνεια. Αυτή δίνεται από:



$$\overline{\sigma} = \frac{\varepsilon^2 \int_s n_i n_j \sigma_{ij}\, d\Omega}{4\pi\varepsilon^2} = \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

. Η μηχανική πίεση η οποία μετριέται είναι $\frac{\sigma_{ii}}{3} = -p_{mech}$ οπότε από τη σχέση (I) βλέπουμε ότι

$$\bar{p}_{mech} - p_e = -K\vec{\nabla}\vec{u}$$

- Ο όρος $-K\vec{\nabla}\vec{u}$ υποδηλώνει ανταλλαγή ορμής κάθετα στην επιφάνεια
- Ο όρος $2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij})$ υποδηλώνει μεταφορά ορμής παράλληλα στην επιφάνεια.

Για ομογενές ρευστό γράψαμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\rho \underbrace{\frac{du_i}{dt}}_{\text{επιτάχυνση}} = \overbrace{-\underbrace{\frac{\partial P_e}{\partial x_i}}_{\text{κάθετη πίεση}} + \left(K+\frac{\mu}{3}\right)\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u})}_{\text{λόγω συμπιεστότητας}} + \mu\underbrace{\vec{\nabla}^2\vec{u}}_{\text{εφαπτομενικό ιξώδες}}}^{=\partial\sigma_{ij}/\partial x_j} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{δύναμη σε όλο το σώμα του ρευστού}}$$

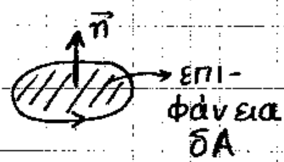
Για K, μ: σταθερά οι εξισώσεις αυτές λέγονται Navier-Stokes.

Για τον υπολογισμό του $\nabla^2\vec{u}$ και του $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}$ σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω διανυσματικές ταυτότητες που ισχύουν σε οποιοδήποτε σύστημα:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u}) - \vec{\nabla}^2\vec{u}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{u} + \vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) \quad \text{όπου } \vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$$

Σημ. αποδεικνύεται ότι $\vec{\nabla}\times\vec{u} = \lim\limits_{\delta A\to 0}\dfrac{\oint \vec{u}\cdot d\vec{\ell}}{\delta A}$



και σε 3 διαστάσεις: $\lim\limits_{\delta V\to 0}\dfrac{\oint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}{\delta V} = \vec{\nabla}\vec{u}$

Έχουμε λοιπόν:

- $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}\vec{u} = 0$ εξίσωση συνέχειας.

Επίσης για βαροτροπικό ρευστό τα P και ρ συνδέονται και οι εξισώσεις κλείνουν. Αν έχουμε εξάρτηση και από τη θερμοκρασία T τότε χρειάζεται και άλλη μία εξίσωση.
Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Navier-Stokes με u_i παίρνουμε:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = -u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i u_i$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+e\right)dV}_{\text{μηχανική + εσωτερική ενέργεια}} = \underbrace{\int_S u_i\sigma_{ij}n_j\,dS}_{\text{έργο επιφανειακών δυνάμεων}} + \underbrace{\int_V \rho f_i u_i\,dV}_{\text{έργο εξωτερικών δυνάμεων σε όλον τον όγκο}} + \underbrace{\int_V \rho Q\,dV}_{\text{πηγή θερμότητας}} - \underbrace{\int_S K_i n_i\,dS}_{\text{ροή θερμότητας που φεύγει από την επιφάνεια}}$$

$e = C_v T$

Είναι $\vec{K}_i = \vec{K}_i(\rho, T, \partial T/\partial x_i)$. Μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή της γραμμικής εξάρτησης του K_i από τα $\partial T/\partial x_i$ (εξάρτηση που τη βλέπουμε και πειραματικά).

$$K_i = K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Ο K_{ij} είναι ισοτροπικός οπότε γράφουμε $K_{ij} = -K\delta_{ij}$ οπότε

$$K_i = -K\delta_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} \Rightarrow K_i = -K\frac{\partial T}{\partial x_i}$$ και αυτή είναι η ροή θερμότητας

Είναι $\int_S u_i\sigma_{ij}n_j\,dS = \int_S \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\sigma_{ij})\,dV$ οπότε

$$\frac{d}{dt}\int \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+e\right)dV = \int_V u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}dV + \int_V \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV + \int_V \rho f_i u_i\,dV +$$

$$+\int_V \rho Q\,dV + \underbrace{\int_V K\nabla^2 T\,dV}_{\text{εδώ χρησιμοποιήσαμε και πάλι το Θεώρημα Gauss}}$$

Άρα η εξίσωση ενέργειας είναι:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}+e\right) = u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho f_i u_i + \rho Q + K\nabla^2 T$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη την εξίσωση για τη μηχανική ενέργεια $\frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i u_i$ παίρνουμε:

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho C_v \frac{dT}{dt} = \underbrace{\sigma_{ij} e_{ij}} + \rho Q + K \nabla^2 T$$ εξίσωση διάχυσης της θερμότητας

λόγω συμμετρικότητας του σ_{ij} το ξ_{ij} που είναι αντισυμμετρικό φεύγει

Είναι $\sigma_{ij} e_{ij} = -(p_e - K\vec{\nabla}\vec{u})\delta_{ij} e_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}\right) e_{ij}$

$$= -p_e\, e_{ii} + K\vec{\nabla}\vec{u}\cdot e_{ii} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\cdot\delta_{ij}\right)^2 + \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}\, 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}\right)$$

- $e_{ii} = \vec{\nabla}\vec{u}$
- $\frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\cdot\delta_{ij}\cdot 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}\right) = \frac{2\mu}{3}\left(\vec{\nabla}\vec{u}\cdot e_{ii} - \frac{1}{3}(\vec{\nabla}\vec{u})^2\delta_{ii}\right) =$

$$= \frac{2\mu}{3}\left((\vec{\nabla}\vec{u})^2 - \frac{1}{3}(\vec{\nabla}\vec{u})^2\cdot 3\right) = 0$$ οπότε

$$\sigma_{ij} e_{ij} = -p_e\vec{\nabla}\vec{u} + K(\vec{\nabla}\vec{u})^2 + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}\right)^2$$ άρα

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \underbrace{-p_e\vec{\nabla}\vec{u}}_{\text{αντιστρεπτό}} + \underbrace{K(\vec{\nabla}\vec{u})^2 + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\vec{u}\,\delta_{ij}\right)^2}_{\text{όροι τριβής}} + \rho Q + K\nabla^2 T$$

έργο, είναι ανάλογο του pdV στη θερμοδυναμική

Συνολικά έχουμε:

1) εξίσωση συνέχειας $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\vec{u} = 0$

2) εξίσωση Navier-Stokes $\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{f}$

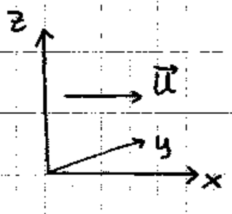
3) θερμοδυναμική εξίσωση $\rho C_v \frac{dT}{dt} = \ldots$

4) Καταστατική εξίσωση $P = P(\rho, T)$

Έχουμε δηλαδή 6 εξισώσεις με 6 αγνώστους $p, \rho, T, \vec{u}$. Χρειαζόμαστε και συνοριακές συνθήκες: $\vec{u}=0$ στα (ακίνητα) τοιχώματα.
Ακριβώς πάνω στη σκληρή επιφάνεια η ταχύτητα του ρευστού πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της επιφάνειας. Αυτό ισχύει για κανονικά ρευστά (με ιξώδες).
Δεδομένων αρχικών συνθηκών σε δεδομένο χώρο (3-dim) υπάρχουν λύσεις των παραπάνω εξισώσεων για πεπερασμένο χρονικό διάστημα και όχι για όλους τους χρόνους. Σε 2 διαστάσεις έχει βρεθεί λύση για όλους τους χρόνους.
Η ακρίβεια των παραπάνω εξισώσεων έχει ελεγχθεί σχολαστικά και με ακριβή πειράματα.

Παραδείγματα

Θεωρούμε ασυμπίεστο ρευστό: $\rho=$ σταθ ή $\vec{\nabla}\vec{u}=0$, K, μ: σταθερά. Ψάχνω για στατικές λύσεις. Θα πάρουμε την περίπτωση γραμμικών εξισώσεων όπου $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=0$.



$$\vec{u} = \left(u(x,y,z,t), 0, 0\right)$$

τότε από την εξίσωση συνέχειας $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ και

$$u = u(y,z,t) \Rightarrow \vec{u} = \left(u(y,z,t), 0, 0\right)$$

Από τις εξισώσεις Navier-Stokes για ασυμπίεστο ρευστό παίρνουμε

στην x-κατεύθυνση:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

στην y-κατεύθυνση: $-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x,z,t) \quad (2)$

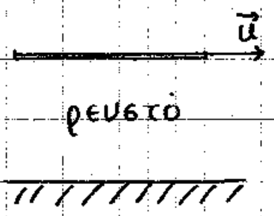
στην z-κατεύθυνση: $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_0 \Rightarrow P = P_0 - g\rho_0 z + p' \quad (3)$

(υδροστατική ισορροπία) και έτσι η ① γίνεται

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \nabla_{\perp}^2 u$$ ($\nabla_{\perp}^2$: η λαπλασιανή στην κάθετη του x κατεύθυνση)

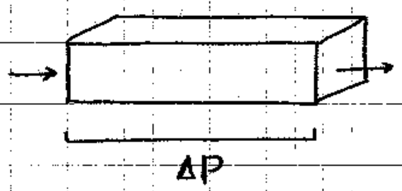
οπότε $\frac{\partial p'}{\partial x} = G(t) \Rightarrow p' = G(t)\cdot x$

π.χ. 1



επιφάνεια που σύρεται με ταχύτητα $\vec{u}$ πάνω στο ρευστό

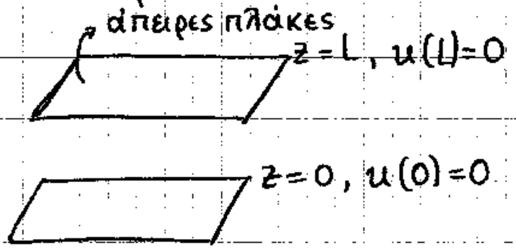
π.χ. 2 παραλληλεπίπεδος σωλήνας



Σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν ακριβείς λύσεις. Εδώ $G(t)$ είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ δυο σημείων.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = G, \quad G = \text{σταθερό}$$

Αν πάρω $u = u(z)$ (δεν έχω πλαϊνά τοιχώματα: ροή μεταξύ δύο άπειρων πλακών, τότε



$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{G}{\mu} \Rightarrow$$

$$u = \frac{G}{\mu}\left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{1}{2} + A\left(\frac{z}{L}\right) + B$$

$z = 0 \Rightarrow u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ και $z = L \Rightarrow u(L) = 0 \Rightarrow A = -\frac{G}{2\mu}$

οπότε $u = \frac{G}{2\mu}\left(\frac{z}{L}\right)\left[\left(\frac{z}{L}\right) - 1\right]$ Μπορώ εδώ να προσθέσω και ό,τι λύσεις θέλω στην y-κατεύθυνση.

Η ροή μέσα από σωλήνα είναι $Q = \vec{u}\cdot\Delta A \sim L^4$ ενώ για τυρβώδη ροή πέφτει στο $Q \sim L^2$ όπου ΔA: διατομή σωλήνα και L: η διάσταση (εγκάρσια) του σωλήνα.