6.12.2005

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{όπου} \quad \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$$

$\vec{u}(\vec{x},t)$: ταχύτητα, σε πεδιακή μορφή

Στην κατάσταση ισορροπίας είναι $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

Γενικά $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \underbrace{d_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$

όρος που εξαρτάται από τη ροή - λόγω της γαλιλαιικής συμμετρίας δεν περιμένουμε να εξαρτάται από την ίδια την ταχύτητα

Θα ψάξουμε να βρούμε την $d_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ δηλ. την εξάρτηση από τα $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Θεώρημα Cayley-Hamilton: το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός 3×3 πίνακα είναι $\lambda^3 - I\lambda^2 + II\lambda - III = 0$, όπου το I είναι το ίχνος του πίνακα και το III είναι η ορίζουσά του. Το Θεώρημα Cayley-Hamilton λέει ότι ο ίδιος ο πίνακας επιλύει το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του.

Αν $A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ τότε θα είναι
$$d_{ij} = \lambda(I, II, III)\, I + \mu(I, II, III)\, A + \nu(I, II, III)\, A^2$$

[αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $d_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ είναι το πολύ τετραγωνική ως προς τα $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$]

Η ροή d_{ij} θεωρούμε ότι είναι γραμμική συνάρτηση του πεδίου: ανάλογο με το νόμο του Ohm $j_i = \sigma_{ij} E_j$ για την αντίδραση ενός συστήματος στην εξωτερική διέγερση του πεδίου.

Θα αναζητήσουμε λοιπόν γραμμικές σχέσεις της μορφής:

$d_{ij} = A_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ όπου d_{ij}: ο τανυστής τάσης και

$\frac{\partial u_k}{\partial u_l}$: η παραμόρφωση. Η σχέση του τανυστή τάσης και της

παραμόρφωσης είναι στιγμιαία (το σύστημα δεν έχει μνήμη) και τοπική. Επιπλέον το υλικό είναι ισοτροπικό (σε στροφή των αξόνων ο A_{ijkl} είναι ο ίδιος).

Έχουμε λοιπόν νευτώνειο μέσο όταν:

1) Η σχέση μεταξύ του d_{ij} και των $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ είναι γραμμική

2) η σχέση είναι στιγμιαία και τοπική

4) ισοτροπικό μέσο

Ο γενικότερος ισοτροπικός τανυστής 2ης τάξης είναι ο $\mu\delta_{ij}$. Ο γενικότερος ισοτροπικός τανυστής 4ης τάξης γράφεται ως

$$A_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

Θέλουμε $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ δηλαδή $A_{ijkl} = A_{jikl}$ και αυτό σημαίνει (αν εναλλάξουμε τους δείκτες i,j) ότι $\beta = \gamma$. Είναι λοιπόν

$$A_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \beta\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \delta_{il}\delta_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$$

$$= \alpha\delta_{ij}(\vec{\nabla}\vec{u}) + \beta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

→ το $\vec{\nabla}\vec{u}$ είναι το trace $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, το οποίο είναι και αναλλοίωτο στις στροφές. Θα έπρεπε (όπως και ισχύει) ο συντελεστής του δ_{ij} να είναι αναλλοίωτος, και το μόνο αναλλοίωτο βαθμωτό ισοτροπικό ως προς $\partial u_i/\partial x_j$ αντικείμενο που είναι και γραμμικό ως προς τα $\partial u_i/\partial x_j$ είναι το $\vec{\nabla}\vec{u}$.

→ Ο συντελεστής του β περιέχει μόνο το συμμετρικό μέρος του πίνακα $\partial u_i/\partial x_j$ λόγω του ότι δεν υπάρχει στροφορμή στο σύστημα (έχουμε πάρει συμμετρία ως προς ij).

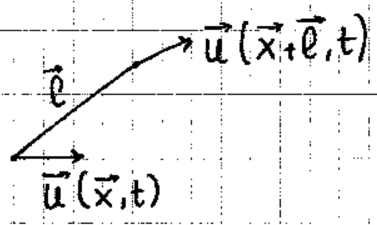
d_{ij} : deviatoric stress

$$\sigma_{ij} = -p_e\delta_{ij} + \underbrace{a(\vec{\nabla}\vec{u})\delta_{ij}}_{} + 2\beta e_{ij}$$

ο όρος αυτός δεν υπάρχει σε ασυμπίεστο ρευστό

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{e_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\xi_{ij}}$$

(συμμετρικό κομμάτι) (αντισυμμετρικό κομμάτι)



Αν $\vec{\ell}$: ένα μικρό "νήμα" μέσα στη ροή τότε

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}+\vec{\ell},t) - \vec{u}(\vec{x},t) = \ell_a \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_a}$$ δηλαδή

η μεταβολή του $\vec{\ell}$ είναι η μεταβολή των ταχυτήτων στην κατεύθυνση του $\vec{\ell}$.

$$\frac{d\ell_i}{dt} = \ell_a \frac{\partial u_i}{\partial x_a}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = A(x,t)\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $A(x,t)$ δίνει την τάση παραμόρφωσης.

$$\dot{\ell}_i = A_{ij}\ell_j \Rightarrow \ell_i \frac{d}{dt}\ell_i = \ell_i A_{ij}\ell_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{|\ell|^2}{2}\right) = \ell_i(e_{ij}+\xi_{ij})\ell_j =$$

$$= \ell_i\ell_j e_{ij} + \ell_i\ell_j\xi_{ij} = e_{ij}\ell_i\ell_j$$ γιατί το ξ_{ij} είναι αντισυμμετρικό

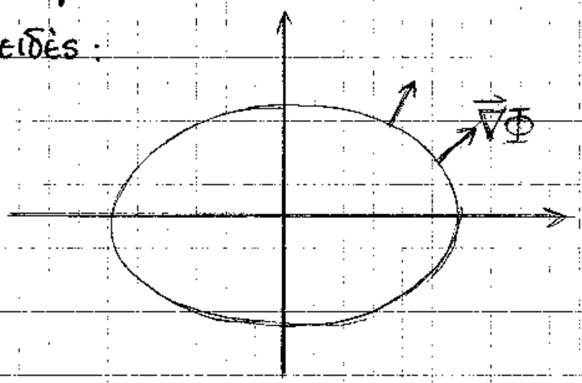
άρα $\xi_{ij}\ell_i\ell_j = 0$. Επομένως

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\ell|^2}{2}\right) = \ell_i e_{ij}\ell_j$$: ο ρυθμός με τον οποίο μεγαλώνει το "νήμα" μέσα στη ροή. Ποια είναι η διεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης του μήκους του "νήματος";

Ο e_{ij} είναι συμμετρικός πίνακας, έχει 3 ιδιοδιευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και 3 ιδιοτιμές. Άρα σε μία ιδιοδιεύθυνση θα έχουμε π.χ. $\frac{d}{dt}\left(\frac{|l|^2}{2}\right) = \lambda_1 l_i l_j$ (στην 1-ιδιοδιεύθυνση). Στην ιδιοδιεύθυνση με τη μέγιστη ιδιοτιμή το μήκος αυξάνει περισσότερο (ανάλογα συμπεράσματα και για την ιδιοδιεύθυνση με τη μικρότερη ιδιοτιμή).

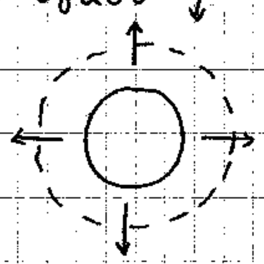
$$\dot{x}_i = A_{ij}x_j = e_{ij}x_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\frac{1}{2}x_a e_{a\beta} x_\beta\right)}_{\Phi}$$

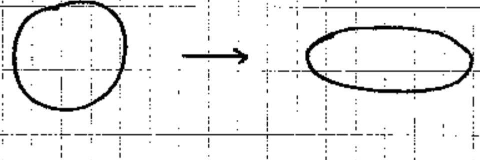
Ορίζω βαθμωτό Φ όπου το $\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla}\Phi$. Η επιφάνεια σταθερού Φ είναι ελλειψοειδές:



$$e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}}_{\text{ισοτροπικό κομμάτι}} + \underbrace{\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)}_{\text{μη ισοτροπικό κομμάτι του οποίου το ίχνος μηδενίζεται}}$$

$$e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}(\vec{\nabla}\vec{u})\cdot\delta_{ij}}_{\text{αυτό το κομμάτι δηλώνει τη μεταβολή του όγκου}} + \underbrace{\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)}_{\text{αυτό το κομμάτι δηλώνει την τάση μια σφαίρα να γίνει ελλειψοειδές υπό σταθερό όγκο}}$$





Και τα δύο μαζί δηλώνουν τη μεταβολή όγκου και μετά παραμόρφωση χωρίς μεταβολή όγκου.

Τώρα το αντισυμμετρικό κομμάτι είναι περιστροφή:

$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ αυτός ο πίνακας έχει 3 ελεύθερα στοιχεία (τα διαγώνια στοιχεία μηδενίζονται)

$\underset{\sqcup}{\overset{\sqcap}{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ -\xi_{12} & 0 & \xi_{23} \\ -\xi_{13} & -\xi_{23} & 0 \end{pmatrix}$ → στις 3 διαστάσεις αυτό ισοδυναμεί με ένα διάνυσμα $\vec{\omega}$ με τον εξής τρόπο:

$$\xi_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \longrightarrow \underset{\sqcup}{\overset{\sqcap}{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Το ω_k είναι ψευδοδιάνυσμα.

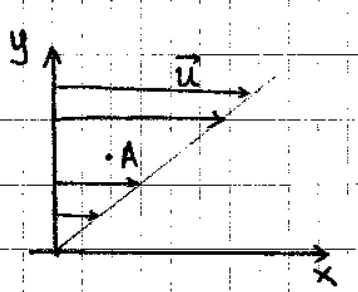
$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j = \underbrace{e_{ij}\delta x_j}_{\text{είναι η συμμετρική αλλαγή της ταχύτητας } \delta\vec{u}^{(s)}} + \underbrace{\xi_{ij}\delta x_j}_{\text{η αντισυμμετρική αλλαγή της ταχύτητας } \delta\vec{u}^{(a)}}$$

Είναι $\delta u_i^{(a)} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k\delta x_j$

δηλαδή $\delta\vec{u}^{(a)} = \vec{\omega}\times(\delta\vec{x})$ και αυτό δηλώνει περιστροφή. Το $\vec{\omega}$ μπορεί να προσδιοριστεί ως $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{u}$ δηλ. ο στροβιλισμός του πεδίου είναι το διπλάσιο της ταχύτητας περιστροφής.

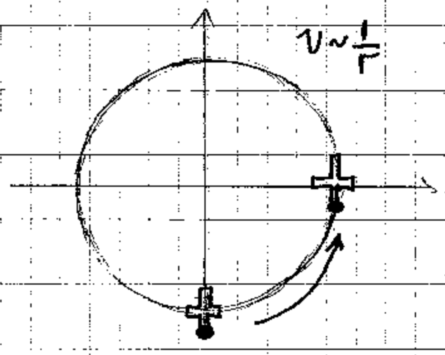
Το ξ δηλώνει το <u>τοπικό</u> spin του ρευστού και όχι το ολικό, δηλ. το τοπικό και το ολικό spin είναι διαφορετικά πράγματα.

<u>π.χ.</u> $\vec{u} = ay\hat{i}$ όπου a: σταθ. Εδώ η γενική κίνηση δεν έχει spin, αλλά το τοπικό spin είναι μη μηδενικό. Για παράδειγμα μία μικρή προπέλα στο σημείο A θα περιστρεφόταν

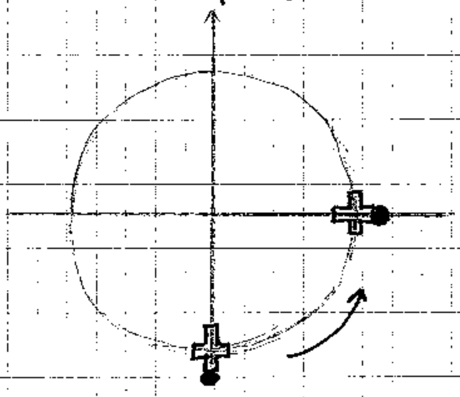


γιατί η ταχύτητα στο πάνω μέρος της είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στο κάτω μέρος της.

<u>π.χ.</u> καταβόθρα, $v \sim \frac{1}{r}$: το τοπικό spin μηδενίζεται αλλά η γενική κίνηση έχει στροβιλισμό



ενώ σε περιστροφική κίνηση με $v_\theta = \Omega r$ έχουμε την εξής εικόνα:



εδώ το τοπικό spin <u>δεν</u> μηδενίζεται

Λόγω συμμετρικότητας το σ_{ij} δεν περιέχει το ξ_{ij}.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_a \frac{\partial}{\partial x_a} u_i\right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a(\vec{\nabla}\vec{u})\delta_{ij} + 2\beta e_{ij}\right)$$

$\sigma_{ij} = -p_e(\vec{x},t)\,\delta_{ij} + a(\vec{\nabla}\vec{u})\,\delta_{ij} + 2\beta e_{ij}$ (θεωρούμε τα a, β σταθερά)

$$2\beta \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ij} = \beta \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \beta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\vec{u})$$

άρα $\vec{\Sigma} = -\vec{\nabla} p_e + a\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u}) + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \beta \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u})$ οπότε

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p_e + (a+\beta)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u}) + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{u} & (1) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 & (2) \\ P_e(\rho) \text{ καταστατική εξίσωση} & (3) \end{cases}$$

Οι (1), (2), (3) μαζί με συνοριακές συνθήκες παρουσιάζουν πληρότητα. Η (1) είναι η εξίσωση Navier-Stokes. Ο β είναι ο 1ος συντελεστής ιξώδους και ο $K = a+\beta$ είναι ο 2ος συντελεστής ιξώδους.

Αν υπάρχει εξάρτηση και από τη θερμοκρασία T χρειάζεται μία ακόμη εξίσωση, για την ενέργεια.

→ Η ανάλωση των ηχητικών κυμάτων γίνεται από σκέδαση από διάφορα σωματίδια και όχι λόγω του όρου $(a+\beta)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u})$ ο οποίος γίνεται σημαντικός σε πολύ μεγάλες συχνότητες.

Παράδειγμα: έστω ότι έχουμε συμπιεστό ρευστό που γεμίζει άπειρο χώρο, είναι ομογενές δηλ. σταθερής πυκνότητας ρ_0, δεν υπάρχει ανάλωση.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}\rho = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}\right) = -\vec{\nabla} p_e = -\frac{dP_e}{d\rho}\vec{\nabla}\rho$$

Το ομογενές ρευστό ήταν αρχικά ακίνητο. Κάνουμε μία διαταραχή: $\rho = \rho_0 + \rho'$ όπου ρ': πολύ μικρό. Η ταχύτητα της διαταραχής που προκαλείται, $\vec{u}$, είναι και αυτή πολύ μικρή.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho')\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}\rho' = 0$$

$$(\rho_0 + \rho')\cdot\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u}\right) = -\left.\frac{dp_e}{d\rho}\right|_{\rho_0+\rho'}\cdot\vec{\nabla}\rho'$$

Από γραμμικοποίηση των εξισώσεων παίρνουμε $\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\vec{\nabla}\vec{u} = 0}$ (I)

$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -c^2\vec{\nabla}\rho'}$ (II) ($\rho'\vec{\nabla}u$, $\vec{u}\vec{\nabla}\rho'$: όροι 2ης τάξης)

$c^2 = \left.\frac{dp_e}{d\rho}\right|_{\rho_0} \rightarrow c = \sqrt{\left.\frac{dp_e}{d\rho}\right|_{\rho_0}}$ ταχύτητα του ήχου

$\frac{d}{dt}(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{\omega} =$ σταθερό $= \vec{\nabla}\times\vec{u}$, αλλά αρχικά είχαμε

μηδέν στροβιλισμό οπότε $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 = 0$. Επομένως $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0 \Rightarrow$
$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ όπου ϕ: κάποιο δυναμικό.

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{u}) = -c^2\vec{\nabla}^2\rho' \quad (\text{κλίση της I}) \\ &\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{u}) = 0 \quad \left(\tfrac{\partial}{\partial t} \text{ της II}\right) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2\vec{\nabla}^2\rho' = 0$$

Ομοίως βγαίνει κυματική εξίσωση και για το δυναμικό ϕ.
Επομένως μπορούμε να γράψουμε λύσεις της μορφής $e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$.
Οποιαδήποτε διαταραχή αναλύεται κατά Fourier και έτσι
παίρνουμε μια σχέση διασποράς για τα κύματα.

$$\rho' = A e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + c^2|\vec{k}|^2)A = 0 \Rightarrow \omega = \pm c|\vec{k}|$$