

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού

1 Δεκεμβρίου 2009

1. Θεωρήστε $t(q, p)$ τη χρονική στιγμή που ένα φυσικό σύστημα βρίσκεται στο σημείο (q, p) αν αρχικά βρισκόταν στο (q_0, p_0) εξελισσόμενο με την Χαμιλτονιανή: $H(q, p)$. Υπό αυτή τη έννοια η t είναι μία κανονική μεταβλητή (προσ. η απεικόνιση αυτή δεν είναι πάντα 1-1). Υπολογίστε την αγκύλη $[t, H]$. Δείξτε ότι σε χώρο φάσεων δύο διαστάσεων ο μετασχηματισμός $(q, p) \rightarrow (t, H)$ είναι κανονικός. Στη περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή $H = (p^2 + x^2)/2$ σχεδιάστε πως απεικονίζεται το χωρίο $H \leq E$ με συντεταγμένες (x, p) στο χώρο (t, H) ; Ποίο το εμβαδόν των χωρίων αυτών;

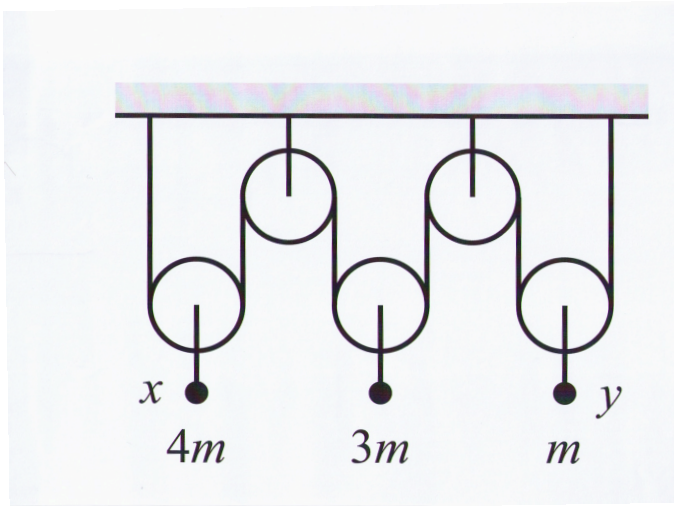
2. Υπολογίστε τις αγκύλες Poisson μεταξύ των συνιστωσών της στροφορμής: $\vec{l} = \vec{x} \wedge \vec{p}$

$$[l_1, l_2], [l_2, l_3], [l_3, l_1]$$

3. Η Χαμιλτονιανή σωματιδίου που κινείται σε μαγνητικό πεδίο με ανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{x})$ είναι:

$$H = \frac{1}{2m} |\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x})|^2.$$

Δείξτε ότι $H = m|\dot{\vec{x}}|^2/2$ όπου η ταχύτητα $\dot{\vec{x}}$ είναι συνάρτηση των κανονικών μεταβλητών \vec{x} και \vec{p} . Υπολογίστε τις αγκύλες $[\dot{x}_i, \dot{x}_j]$ και $[\dot{x}_i, x_j]$.



4. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή της μηχανής Atwood του σχήματος η οποία βρίσκεται σε σταθερό βαρυτικό πεδίο έντασης g . Χρησιμοποιήστε ως μεταβλητές θέσης την απόσταση x της αριστερής μάζας $4m$ από την οροφή και την απόσταση y της δεξιάς μάζας m από την οροφή. Προσδιορίστε τη διατηρούμενη ορμή του συστήματος. Υπολογίστε την επιτάχυνση της κεντρικής μάζας.

5. Θεωρήστε την Λαγκραντζιανή:

$$L = e^{\gamma t} |\dot{\vec{x}}|^2$$

σωματιδίου που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο. Τι περιγράφει η Λαγκραντζιανή αυτή; Διατηρείται η συνθήκης ορμή και στροφορμή αυτού του σωματιδίου; Δείξτε με προσοχή ότι οι μετασχηματισμοί $\vec{X}(\epsilon) = \vec{x} + \epsilon \vec{n}$ και $\vec{X}(\epsilon) = \vec{x} + \epsilon \vec{n} \wedge \vec{x}$ όπου \vec{n} κάποιο σταθερό διάνυσμα αποτελούν συμμετρία της Λαγκραντζιανής και προσδιορίστε τις αντιστοιχούσες διατηρίσιμες ποσότητες. Γράψτε τώρα την αντιστοιχούσα Χαμιλτονιανή και προσδιορίστε τους γεννήτορες των συμμετριών αυτών.