ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού

12 Ιανουαρίου 2010

I. Στο πρόβλημα της κίνησης δύο σωμάτων που κινούνται στον χώρο και αλληλεπιδρούν με Νευτώνειο δυναμικό προσδιορίστε τις διατηρήσιμες ποσότητες και προσδιορίστε 6 διατηρήσιμες ποσότητες που βρίσκονται σε ενέλιξη και είναι ανεξάρτητες αποδεικνύοντας έτσι ότι το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο. Τι απαιτείται για να είναι η κίνηση φραγμένη και να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του θεωρήματος του Arnold.

II. (Εμπέδωση και μία μικρή επέκταση του θεωρήματος του Arnold για την αδιαβατικότητα). Στη τάξη εξετάσαμε τη συμπεριφορά των λύσεων εξισώσεων της μορφής:

$$\dot{\theta} = \omega(I,\lambda) + \epsilon f(I,\theta,\lambda) \ \ , \ \ \dot{I} = \epsilon g(I,\theta,\lambda) \ \ \ , \ \ \dot{\lambda} = \epsilon \ ,$$

που προκύπτουν όταν οι ”σταθερές” που υπεισέρχονται στη Χαμιλτονιανή ενός μονοδιαστάτου συστήματος που εκτελεί περιοδική κίνηση μεταβάλλονται με τον χρόνο, μέσω της παραμέτρου λ. Η απόδειξη ότι

$$|I(t) - I(0)| < K\epsilon \quad , \ \ 0 < t < 1/\epsilon \tag{1}$$

(Κ μία σταθερά) οπότε το $I(t)$ είνα αδιαβατικό αναλλοίωτο της κίνησης βασίστηκε στο ότι υποθέτουμε $\omega > 0$, στη περιοδικότητα των h, g και στο γεγονός ότι g έχει μηδενική μέση τιμή:

$$\overline{g} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = 0 \ ,$$

για σταθερές τιμές του I και λ. Προσέξτε ότι η h δεν έχει αναγκαστικά μηδενική μέση τιμή.

1. Προσδιορίστε τις h, g στη περίπτωση του ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\epsilon t)}{2}x^2$$

   και αποδείξτε την ανισότητα (1) για την ειδική περίπτωση αυτή. Εξετάσατε ειδικότερα τις περιπτώσεις $\omega^2 = e^{\epsilon t}$ και $\omega^2 = e^{\epsilon^2 t^2}$, για θετικούς χρόνους.

2. Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν η g είναι μεν περιοδική αλλά δεν έχει μηδενική μέση τιμή (οπότε η δυναμική αυτή δεν προκύπτει από κανονικό μετασχηματισμό σε μεταβλητές γωνίας, δράσης, και έχει άλλη προέλευση). Θα εξετάσουμε την εξής απλούστερη δυναμική:

$$\dot{\theta} = \omega(I) \neq 0, \ \ \dot{I} = \epsilon g(\theta)$$

   με g απλώς περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Δείξτε τότε ότι

$$|I(t) - \overline{I}(t)| < K\epsilon \quad , \ \ 0 < t < 1/\epsilon$$

   (Κ μία σταθερά) οπου η μέση τιμή $\overline{I}(t)$ εξελίσσεται σύμφωνα με τη μέση δυναμική $\dot{\overline{I}} = \epsilon\overline{g}$ οπότε $\overline{I}(t) = I(0) + \epsilon\overline{g}t$. Εξετάστε εξ αρχής τις εξής τρείς περιπτώσεις α) $\omega = \omega_0$ (μία σταθερά) και $g(\theta) = \sin\theta$, β) $\omega = \omega_0$ και $g(\theta)$ κάποια περιοδική συνάρτηση και (γ) $\omega = \alpha I$ όπου τώρα α μία σταθερά και $g(\theta) = \cos\theta$. Είναι αναγκαίος ο περιορισμός της ανισότητας για χρόνους $0 < t < 1/\epsilon$ σε όλες τις περιπτώσεις;