Το σχήμα μιας αλυσίδας εντός του βαρυτικού πεδίου

Έστω $y = f(x)$ το σχήμα ενός εύκαμπτου ομογενούς νήματος συνολικού μήκους l το οποίο αναρτάται από δύο σημεία στο ίδιο οριζόντιο σημείο τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$. Ζητάμε να βρούμε το σχήμα αυτό από την απαίτηση η δυναμική ενέργεια του νήματος να είναι η ελάχιστη δυνατή. Αν δεν ήταν το νήμα θα άλλαζε σχήμα προκειμένου να "πέσει" ακόμη χαμηλότερα.

Η δυναμική ενέργεια θα είναι

$$V[y] = g\mu \int_0^l y ds \tag{1}$$

όπου ds το στοιχειώδες τμήμα του νήματος και μ η γραμμική του πυκνότητα. Ο δεσμός του μήκους επιβάλλει

$$\int_0^l ds = l. \tag{2}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα αυτό δεν έχει τέτοια μορφή ώστε να έχει εξάρτηση από το y ή κάποιου είδους παράγωγο του y, μπορούμε να αλλάξουμε το στοιχείο ολοκλήρωσης από ds σε

$$dx\,\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}.$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν πολλαπλασιαστή Lagrange για να συμπεριλάβουμε το δεσμό μας αρκεί να αναζητήσουμε ακρότατα της

$$\tilde{V}[y(x), \lambda] = \int_{-a}^{+a} dx(\mu g y - \lambda)\sqrt{y'^2 + 1}dx + \lambda l. \tag{3}$$

Κατασκευάζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange θα έχουμε την εξίσωση του δεσμού ως προς λ ενώ ως προς x τη διαφορική εξίσωση

$$\mu g\sqrt{y'^2 + 1} - \frac{d}{dx}\left[\frac{(\mu g y - \lambda)y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}\right] = 0. \tag{4}$$

Αν θυμηθούμε ότι $\sqrt{y'^2 + 1} = ds/dx$, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\mu g ds = d\left[(\mu g y - \lambda)\frac{dy}{ds}\right] \Rightarrow \mu g s = (\mu g y - \lambda)\frac{dy}{ds}\bigg|_0^s \tag{5}$$

όπου το αρχικό σημείο μέτρησης των μηκών κατά μήκος του νήματος θεωρείται αυθαίρετο.

Μια παρατήρηση: Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι ο πολαπλασιαστής Lagrange λ οφείλει να είναι σταθερός αριθμός. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται κατ' ουσίαν στο ότι έχουμε να κάνουμε με ένα πρόβλημα καθορισμού μίας μόνο συνάρτησης η οποία ικανοποιεί κάποιο δεσμό, αφού η αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange θα καταλήξει να πάρει τη μορφή: μια συνάρτηση = πολλαπλάσιο κάποιας άλλης. Δεν μπορεί τότε παρά ο συντελεστής αναλογίας να είναι σταθερός αριθμός. Αν όμως είχαμε να κάνουμε με περισσότερες συναρτήσεις (τις συντεταγμένες της Λαγκρανζιανής) οι οποίες υπόκεινται σε κάποιο δεσμό τότε θα είχαμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange να έχουν συνιστώσες ανάλογες των συνιστωσών κάποιων άλλων συναρτήσεων (αν επρόκειτο για δεσμό με τη μορφή συνάρτησης) ή κάποιων άλλων εξισώσεων Euler-Lagrange (αν επρόκειτο για κάποιο ολοκληρωτικό δεσμό). Η αναλογία των συνιστωσών θα μπορούσε τότε να έχει νόημα και με συντελεστή αναλογίας εξαρτώμενο από τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης (το χρόνο για Λαγκρανζιανές φυσικών συστημάτων).

Η τελευταία αυτή σχέση ολοκληρώνεται αμέσως ως ακολούθως:

$$d(s - s_0)^2 = d(y - y_0)^2 \tag{6}$$

όπου $s_0 = -(y-y_0)(dy/ds)|_{s=0}$ και $y_0 = \lambda/(\mu g)$. Η παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται

$$(s-s_0)^2 - (y-y_0)^2 = \pm C^2 \tag{7}$$

όπου C κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός (σταθερός). Πιθανώς να παρασυρθεί κανείς και να επιλέξει το θετικό πρόσημο δεδομένου ότι το μήκος ενός απειροστού κομματιού του νήματος είναι μεγαλύτερο από την κατακόρυφη προβολή του (πυθαγόρειο θεώρημα). Όμως, θα πρέπει να είναι κανείς πιο προσεκτικός αφού αυτό που ισχύει είναι ότι

$$ds \geq dy$$

και επομένως

$$(s-s_0) \leq (y-y_0)$$

έτσι ώστε

$$ds\ (s-s_0) = dy\ (y-y_0).$$

Συνεπώς το πρόσημο της σχέσης (7) είναι αρνητικό και μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να γράψουμε

$$s - s_0 = C\sinh(\phi)\ ,\ y - y_0 = C\cosh(\phi).$$

Επιπλέον επειδή $(ds)^2 - (dy)^2 = (dx)^2$,

$$dx = Cd\phi\ \text{ ή }\ \phi = (x/C) + \phi_0$$

Συνεπώς η ζητούμενη λύση θα είναι

$$y(x) = y_0 + C\cosh(x/C + \phi_0). \tag{8}$$

Με δεδομένες τις συνοριακές συνθήκες $y(-a) = y(a) = 0$ θα πρέπει

$$y_0 + C\cosh(-a/C + \phi_0) = y_0 + C\cosh(a/C + \phi_0) = 0$$

Η συνθήκη αυτή, από την ιδιότητα αν $|x_1| > |x_2|$ τότε $\cosh x_1 > \cosh x_2$, συνεπάγεται και ότι $\phi_0 = 0$ και συνεπώς $y_0 = -C\cosh(a/C)$. Τέλος, ο δεσμός του συνολικού μήκους συνεπάγεται

$$l = \int_{-a}^{+a} dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \int_{-a}^{+a} dx\cosh(x/C) = C(\sinh(a/C) - \sinh(-a/C)) = 2C\sinh(a/C).$$

Η σχέση αυτή προσδιορίζει την τιμή του C.

Εναλλακτική κατασκευή: Όπως πρότεινε ένας φοιτητής στο μάθημα θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει ως μεταβλητή της ολοκλήρωσης το ίδιο το s, χωρίς να καταφύγει στο x, μόνο που τότε δεν έχει νήμα να χρησιμοποιήσει κανείς το δεσμό για το s αφού αυτό καθορίζεται στην αρχή του Hamilton, είναι απλώς το άνω όριο της ολοκλήρωσης. Ο δεσμός σε αυτή την περίπτωση μεταφέρεται στην συντεταγμένη, που ως τέτοια θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το x για το οποίο γνωρίζουμε ότι εκτείνεται από $-a$ έως $+a$ (η χρήση της συντεταγμένης y είναι εξίσου καλή παρόλο που τα ακραία σημεία αυτής είναι το ίδιο σημείο $y = 0$). Έτσι θα μπορούσαμε ως Λαγκρανζιανή του εν λόγω προβλήματος να θεωρήσουμε την

$$L = \mu g y(s) - \lambda\frac{dx}{ds} = \mu g y(s) - \lambda\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}. \tag{9}$$

Ή εξίσωση Euler - Lagrange είναι και πάλι

$$\mu g - \lambda\frac{d}{ds}\frac{dy/ds}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} \Rightarrow \mu g = \lambda\frac{d}{ds}\frac{dy}{dx}. \tag{10}$$

Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται εύκολα και δίνει

$$\mu g(s - s_0) = \lambda \frac{dy}{dx}.$$

Αυτή ολοκληρώνεται άλλη μια φορά αν ξαναγραφεί το δεξί μέλος ως συνάρτηση του dy/ds. Πράγματι

$$\frac{\mu g(s - s_0)}{\lambda} = \frac{dy/ds}{\sqrt{1 - (dy/ds)^2}} \Rightarrow dy = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu g}{\lambda}(s - s_0)\right)^2}}$$

που δίνει

$$y = y_0 + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu g}} \sinh^{-1} \phi \Big|_0^{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu g}} s}.$$

Η μορφή αυτή μπορεί να έρθει στην προηγούμενη μορφή αλλά με κάποιο κόπο. Το κέρδος της εύκολης Λαγκρανζιανής και της ολοκλήρωσης της αντίστοιχης εξίσωσης Euler-Lagrange πληρώθηκε τελικά με μια πιο δύσπεπτη απάντηση της μορφής $y(s)$.

Ασυνεχείς Λύσεις: Ας κρεμάσουμε τώρα και ένα επιπλέον βάρος mg σε κάποιο σημείο της αλυσίδας, έστω στο σημείο $s = s_\star$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να αλλάξουμε το μ σε $\mu + m\delta(s - s_\star)$. Εδώ αναδεικνύεται ως σαφώς καλύτερη πρακτικά, η περίπτωση της ολοκλήρωσης ως προς s, έναντι αυτής ως προς x. Θα επιχειρήσουμε και τις 2 όμως για να δείξουμε πώς μπορούμε να ξεπεράσουμε ορισμένες δυσκολίες που ανακύπτουν. Θα έχουμε λοιπόν από τη σχέση (10):

$$\left(\mu + m\delta(s - s_\star)\right) g = \lambda \frac{d}{ds}\frac{dy}{dx} \tag{11}$$

η οποία με μια ολοκλήρωση στο διάστημα $[s_\star - \epsilon/2, s_\star + \epsilon/2]$ δίδει

$$(\mu\epsilon + m)g/\lambda = \frac{dy}{dx}\Big|_{s_\star - \epsilon/2}^{s_\star + \epsilon/2}.$$

Με άλλα λόγια η παράγωγος της $y(x)$ δεξιά και αριστερά από τη θέση $s = s_\star$ παρουσιάζει ασυνέχεια ίση με mg/λ. Όσον αφορά στα τμήματα του νήματος εκατέρωθεν του σημείου $s_\star$ οι εξισώσεις που περιγράφουν το σχήμα της αλυσίδας είναι αυτές που βρήκαμε και προηγουμένως αφού στις περιοχές αυτές η συνάρτηση δ είναι 0. Αρκεί λοιπόν να συνδέσουμε δύο λύσεις της μορφής που βρήκαμε προηγουμένως επιβάλλοντας συγκεκριμένη ασυνέχεια της παραγώγου στην εν λόγω θέση. Εδώ προκύπτει ένα μικρό πρόβλημα που αφορά στη διαφορετική τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange στις δύο θεωρήσεις (με μεταβλητή ολοκλήρωσης το x και το s αντίστοιχα).

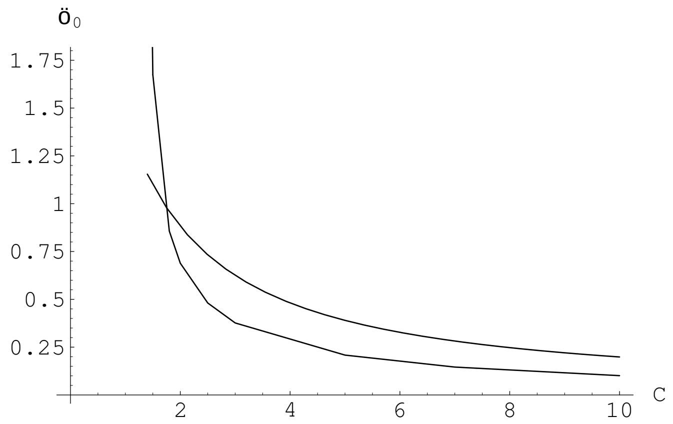
Θα χρησιμοποίσουμε λοιπόν τη γενική λύση (8) που βρήκαμε παραπάνω προτού επιβάλλουμε οποιεσδήποτε συνοριακές συνθήκες και θα τις κολλήσουμε καταλλήλως στο $s = s_\star$:

$$y(x) = \begin{cases} y_0^{\alpha\rho} + C\cosh(x/C + \phi_0^{\alpha\rho}) & \text{αν } x < x(s_\star) \\ y_0^{\delta\varepsilon} + C\cosh(x/C + \phi_0^{\delta\varepsilon}) & \text{αν } x > x(s_\star) \end{cases} \tag{12}$$

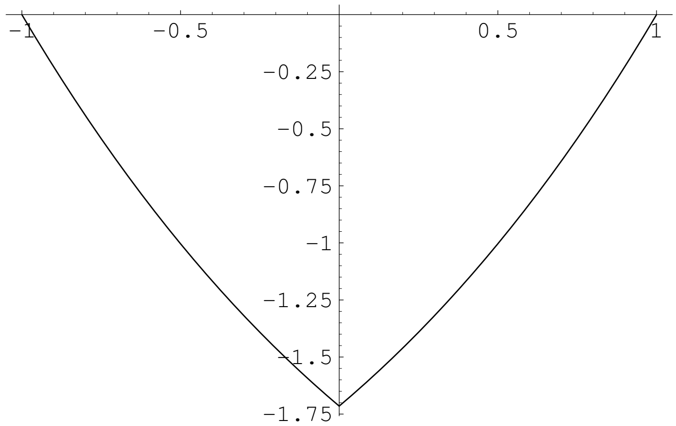
με επιπλέον απαίτηση η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $s = s_\star$ και η παράγωγος της συνάρτησης στο εν λόγω σημείο να παρουσιάζει ασυνέχεια mg/λ. Εδώ χρειάζεται κάποια προσοχή όσον αφορά στην τιμή του πολλαπλασιαστή λ, αφού άλλη είναι η τιμή αυτού όταν η Λαγκρανζιανή είναι αυτή της σχέσης (3) και άλλη αυτή της σχέσης (9). Έτσι από την ολοκλήρωση της έκφρασης (9) και τη σύγκρισή της με την έκφραση του μήκους του νήματος αριστερά από το σημείο $x(s_\star)$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda = \mu g C$ δηλαδή

$$\frac{m}{\mu} = C\left(\sinh(x_\star/C + \phi_0^{\delta\varepsilon}) - \sinh(x_\star/C + \phi_0^{\alpha\rho})\right). \tag{13}$$

Η γενική περίπτωση είναι δύσκολο να επιλυθεί αφού πρέπει να ικανοποιήσει κανείς ταυτόχρονα 6 υπερβατικές εξισώσεις (τις συνοριακές συνθήκες για τα άκρα του νήματος, το άλμα στην παράγωγο,



Σχήμα 1: Η γραφική λύση των δύο υπερβατικών εξισώσεων (14) για την περίπτωση $m/(2\mu a) = l/(2a) = 2$ δίδει $C = 1.69$, $\phi_0 = 1.00$.



Σχήμα 2: Η μορφή του νήματος με το κρεμασμένο βάρος στο κατώτατο σημείο (βλ. έκφραση 15).

τη συνέχεια του νήματος και το δεσμό για το μήκος των δύο κομματιών του νήματος). Οι άγνωστοι είναι επίσης 6, οι $C, y_0^{\alpha\rho}, y_0^{\delta\varepsilon}, \phi_0^{\alpha\rho}, \phi_0^{\delta\varepsilon}, x_\star$ οι οποίοι προσδιορίζονται από τις παραπάνω εξισώσεις. Ως παράδειγμα θα λύσουμε μια πιο απλή περίπτωση που παρουσιάζει συμμετρία, η $s_\star = l/2$ που οδηγεί στο ότι $x_\star = 0$ και $\phi_0^{\delta\varepsilon} = -\phi_0^{\alpha\rho} = \phi_0$ οπότε και $y_0^{\delta\varepsilon} = y_0^{\alpha\rho} = y_0$. Παίζοντας με τις εξισώσεις καταλήγουμε ότι

$$\frac{l\mu}{m} + 1 = \frac{\sinh(\phi_0 + a/C)}{\sinh(\phi_0)} \text{ και } \frac{m}{\mu} = 2C\sinh(\phi_0). \tag{14}$$

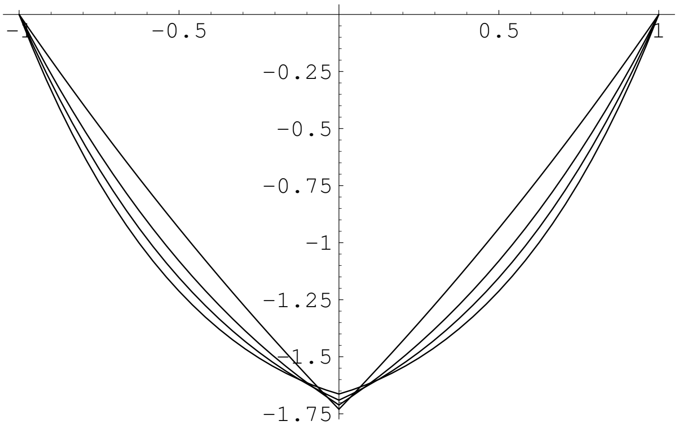
Η ταυτόχρονη επίλυση αυτών, η οποία μπορεί να επιτευχθεί γραφικά ζωγραφίζοντας τις δύο καμπύλες στο χώρο C, ϕ_0 και βρίσκοντας την τομή τους, δίδει τις κατάλληλες τιμές των C, ϕ_0 οπότε

$$y(x) = \begin{cases} C\left(\cosh(x/C - \phi_0) - \cosh(a/C + \phi_0)\right) & \text{αν } x < 0 \\ C\left(\cosh(x/C + \phi_0) - \cosh(a/C + \phi_0)\right) & \text{αν } x > 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Στα διαγράμματα που ακολουθούν έχουμε σχεδιάσει τη γραφική λύση για την αριθμητική τιμή $m/(2\mu a) = l/(2a) = 2$ καθώς και το αντίστοιχο σχήμα του νήματος.

Τελειώνοντας θα δείξουμε πώς μπορούμε να ξεπεράσουμε μια τεχνική δυσκολία που ανακύπτει κατά την ανάλυση του προβλήματος με το κρεμασμένο βάρος αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη Λαγκρανζιανή (3) με μεταβλητή ολοκλήρωσης την x. Η (4) στην περίπτωση της ασυνεχούς λύσης διαμορφώνεται ακολούθως ως

$$(\mu + m\delta(s - s_\star))g\sqrt{y'^2 + 1} - \frac{d}{dx}\left[\frac{((\mu + m\delta(s - s_\star))gy - \lambda)y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}\right] = 0. \tag{16}$$



Σχήμα 3: Τα σχήματα τεσσάρων νημάτων με μήκος $l = 4$ που αναρτώνται από τα σημεία $x = \pm 1$, και στα μέσα των οποίων κρεμόνται βάρη με λόγους $m/(l\mu) = 2.5, 0.5, 0.25, 0.125$. Όσο πιο μεγάλο το κρεμασμένο βάρος τόσο πιο χαμηλά φτάνει το νήμα.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση σε ένα απειροστό διάστημα $[x(s_\star) - \epsilon/2, x(s_\star) + \epsilon/2]$ που περιλαμβάνει το σημείο $x(s_\star)$ η συνάρτηση δέλτα εξαφανίζεται στο δεξί μέρος ενώ είναι το μοναδικό κομμάτι που συμβάλλει στο αριστερό μέλος. Έτσι

$$\int_{x(s_\star)-\epsilon/2}^{x(s_\star)+\epsilon/2} \delta(s - s_\star)\sqrt{y'^2 + 1}dx = \int_{x(s_\star)-\epsilon/2}^{x(s_\star)+\epsilon/2} \frac{\delta(x - x(s_\star))}{|ds/dx|_{x(s_\star)}}\sqrt{y'^2 + 1}dx. \tag{17}$$

Αν και η ολοκλήρωση αυτή φαίνεται να παρουσιάζει υπολογιστικές δυσκολίες λόγω ασυνέχειας των παραγώγων $ds/dx, dy/dx$ στο σημείο $x(s_\star)$, εντούτοις είναι

$$\frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{|ds/dx|_{x(s_\star)}} = 1$$

οπότε η ολοκλήρωση του δέλτα όρου δίνει απλώς 1. Η παραπάνω ανάλυση θα μπορούσε να είχε αποφευχθεί παρατηρώντας απλώς ότι $\sqrt{y'^2 + 1}dx = ds$ οπότε η ολοκλήρωση ως προς s στο πρώτο ολοκλήρωμα της (17) θα γινόταν αβίαστα. Και με αυτή τη Λαγκρανζιανή λοιπόν καταλήγουμε σε μια συνθήκη ασυνέχειας παραγώγου (με προφανώς συνεχή $y(x)$):

$$\frac{mg}{\mu g y_\star - \lambda} = \left.\frac{dy}{ds}\right|_{x(s_\star)-}^{x(s_\star)+} \tag{18}$$

όπου το λ έχει εδώ διαφορετική τιμή απ' ότι στην (11). Κάνοντας πράξεις και χρησιμοποιώντας την τιμή $\lambda = \mu g y_0$ που βρήκαμε κατά την πρώτη ανάλυση του προβλήματος χωρίς επιπλέον βάρος καταλήγουμε πάλι στην ίδια σχέση ασυνέχειας παραγώγου που βρήκαμε και προηγουμένως (14). Μοναδικό νέο στοιχείο στην ανάλυση με μεταβλητή ολοκλήρωσης την x είναι ότι ο πολλαπλασιαστής λ είναι και αυτός ασυνεχής αφού εν γένει $y_0^{\text{δε}} \neq y_0^{\text{αρ}}$.