Κεφάλαιο 1

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Κατώ απο ποίες συνθήκες μία σειρά που παράγαμε κατά την έρευνά μας για να προσεγγίσουμε κάποια συνάρτηση συγκλίνει;

1.1 Οι συντηρητικοί ορισμοί

Υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τη σύγκλιση μιας σειράς. Ο συνηθέστερος ορισμός θεωρεί τη σειρά $\sum_n a_n x^n$ ως συγκλίνουσα όταν τα μερικά αθροίσματα $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ έχουν κάποιο όριο όταν το $N \to \infty$. Με άλλα λόγια, αν μας δοθεί κάποιο $\epsilon > 0$, υπάρχει δείκτης M ούτως ώστε $|A_{n+p} - A_n| < \epsilon$ για κάθε $p > 0$ και $n > M$. Πιό αυστηρός ορισμός σύγκλισης είναι η απόλυτη σύγκλιση κατά την οποία απαιτείται η σύγκλιση της σειράς της οποίας κάθε όρος έχει αντικατασταθεί από το μέτρο του. Χρησιμοποιώντας τη τριγωνική ανισότητα $|\sum_n a_n x^n| \leq \sum_n |a_n x^n|$ μπορείτε να δείξετε ότι απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται σύγκλιση.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να προσδιορίσετε κατά πόσον μία σειρά συγκλίνει. Προφανώς για να συγκλίνει οι όροι a_n πρέπει να μικραίνουν όταν το $n \to \infty$. Συνήθως συγκρίνουμε τη σειρά που έχουμε με την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ η οποία συγκλίνει απολύτως στο $1/(1-x)$ όταν είναι $|x| < 1$. Αν συγκρίνουμε τη σειρά που έχουμε με τη γεωμετρική σειρά και ισχύει ότι $|a_n x^n| < |r^n|$ δηλαδή

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < |r| < 1,$$

τότε η σειρά θα συγκλίνει για $|x| < |a_n|/|a_{n+1}|$. Ένα όμορφο και πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα είναι ότι άν προσδιορίσουμε ότι η σειρά συγκλίνει για κάποιο x_0 τότε θα συγκλίνει καί για όλες τις τιμές στο μιγαδικό επίπεδο που βρίσκονται μέσα στο κύκλο $|x| \leq |x_0|$ διότι είναι $|a_n x^n| = |a_n x_0^n||x/x_0|^n$. Αντιθέτως αν η σειρά αποκλίνει για κάοιο x_1 τότε θα αποκλίνει για κάθε $|x| > |x_1|$. Συνεπώς αν κάτι δεν πάει καλά σε κάποιο σημείο στο μιγαδικό πεδίο και δεν συγκλίνει η σειρά στο σημείο αυτό, η σειρά μπορεί να συγκλίνει μόνο στα εσωτερικά σημεία του κύκλου που ορίζεται από το σημείο αυτό.

1.2 Λιγότερο συντηρητικοί ορισμοί

Κάθε σειρά που έχουμε κατασκευάσει για να προσεγγίσουμε κάποια συνάρτηση είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει περιλαμβάνει χρήσιμες πληροφορίες για τη συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε. Το ερώτημα είναι πως μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για τη συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε αν η σειρά που έχουμε κατασκευάσει αποκλίνει.

Ο συντηρητικός ορισμός της σύγκλισης απαιτεί ότι τα μερικά αθροίσματα $A_N(x) = \sum^N a_n x^n$ συγκλίνουν στο σημείο x στη συνάρτηση $f(x)$ εάν $|A_N(x) - f(x)| \to 0$ όταν το $N \to \infty$. Προσέξτε σε αυτόν τον ορισμό το x κρατιέται σταθερό καθώς το $N \to \infty$.

Υποθέστε ότι θέλετε να προσδιορίσετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ για $x \to x_0$ και ότι η $f(x)$ θέλουμε να προσεγγισθεί από το μερικό άθροισμα $A_N(x)$, το οποίο μπορεί και να αποκλίνει. Η σειρά αυτή μπορεί να είναι χρήσιμη αν ικανοποιεί την ασθενέστερη συνθήκη: για N σταθερό καθώς το $x \to x_0$ (το x_0 συνήθως είναι το ∞) να ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|A_N(x) - f(x)|}{|f(x)|} = 0.$$

Αυτή η σύγκλιση λέγεται ασυμπτωτική σύγκλιση και η A_N ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)$ για $x \to x_0$.

Προσέξτε το περιεχόμενο του παραπάνω ορισμού της ασυμπτωτικής σύγκλισης. Ο ορισμός αυτός βεβαιώνει ότι το μερικό άθροισμα A_N είναι καλή προσέγγιση της $f(x)$ για τα x που είναι πλησίον στο x_0. Αυτό το οποίο δεν μας λέει ο ορισμός αυτός είναι ότι η $A_N(x)$ είναι καλή προσέγγιση της $f(x)$ όταν το $N \to \infty$. Μάλιστα μπορεί όσο λαμβάνουμε μεγαλύτερα N τα μερικά αθροίσματα $A_N(x)$ να προσεγγίζουν χειρότερα την $f(x)$.

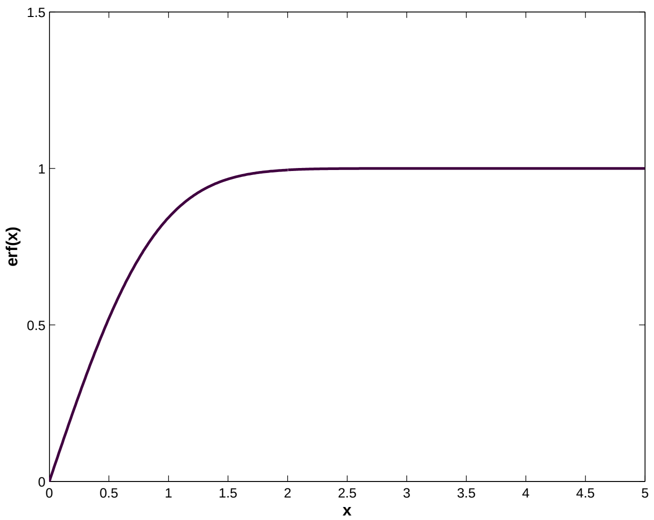
Παράδειγμα ασυμπτωτικού αναπτύγματος είναι ο τύπος του Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \dots\right)$$

Η σειρά αυτή παρότι αποκλίνει για κάθε τιμή του $1/n$ συγκλίνει ασυμπτωτικά στο $n!$ όταν $n \to \infty$. Είναι τόσο καλή δε η προσέγγιση της $n!$ από το ασυμπτωτικό αυτό ανάπτυγμα που το σχετικό λάθος είναι μικρότερο του 1 % για όλα τα $n \geq 1$.

ΑΣΚΗΣΗ

Άσκηση 1. *Υπολογίστε το $n!$ για $n = 1, \dots, 5$ και συγκρίνατε τη τιμή του με τη προσεγγιστική τιμή από τον τύπο του Stirling κρατώντας 1,2 και 3 όρους. Σχεδιάστε το σχετικό λάθος συναρτήσει του n για τιμές μέχρι το 5.*



1.3 Ένα παράδειγμα

Θεωρήστε τη συνάρτηση λάθους (error function):

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

το γράφημα της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Οι τιμές αυτής της συνάρτησης μπορούν να υπολογισθούν με αριθμητική ολοκλήρωση, αλλά οι τιμές της δίδονται αμέσως στη MATLAB ή MATHEMATICA (στη MATLAB π.χ. αν γράψεται $erf(x)$ σας δίδεται αμέσως η τιμή της συνάρτησης στο x).

Θέλουμε να βρούμε ένα χρήσιμο ανάπτυγμα της συνάρτησης αυτής. Επειδή η συνάρτηση λάθους είναι το ολοκλήρωμα μίας εκθετικής, η οποία έχει ανάπτυγμα Taylor περί $x = 0$ που έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης, μπορούμε να βρούμε ένα ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης λάθους περί $x = 0$ που να έχει και αυτό άπειρη ακτίνα σύγκλισης, ολοκληρώνοντας το ανάπτυγμα της e^{-t^2}. Το ανάπτυγμα αυτό είναι:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \tag{1.1}$$

Πόσο χρήσιμο είναι αυτό το ανάπτυγμα;

Άσκηση 2. *Υπολογίστε στον υπολογιστή τα μερικά αθροίσματα $A_{10}(x)$, $A_{20}(x)$ και $A_{50}(x)$ της σειράς Taylor (1.1) για $0 \leq x \leq 5$ και σχεδιάστε τα δίπλα στη συνάρτηση λάθους.* ΑΣΚΗΣΗ

Κάνοντας την άσκηση θα δείτε ότι παρότι αυξάνοντας των αριθμό των όρων στη συγκλίνουσα σειρά (1.1) μεγαλώνει τη περιοχή ακρίβειας της συνάρτησης η περιοχή αυτή είναι περιορισμένη. Για να έχουμε καλή προσέγγιση για μεγάλα x πρέπει να αθροίσουμε πάρα πολλους όρους, κάτι το οποίο είναι και πολύ δύσκολο υπολογιστικά, διότι προσθαφαιρούνται συνεχώς πολύ μεγάλοι όροι. Μαθαίνετε με το παράδειγμα αυτό ότι παρότι έχετε μία συγκλίνουσα σειρά αυτή είναι κατ᾽ουσίαν άχρηστη.

Υπάρχει ένας άλλος τόπος για να προσεγγίσουμε την συνάρτηση λάθους που βασίζεται σε μερικούς απλούς μεν αλλά λεπτούς χειρισμούς. Γνωρίζουμε επειδή

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ότι $erf(\infty) = 1$. Γνωρίζοντας τη τιμή της συνάρτησης στο $x = \infty$ ας προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε τη συνάρτηση λάθους ως προς το $x = \infty$. Γράφουμε για αυτό το σκοπό:

$$erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

και προσπαθούμε να αναπτύξουμε το

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

σε σειρά. Για αυτό με αλλεπάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέρη έχουμε:

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \int_x^\infty \frac{de^{-t^2}}{-t} = \left.\frac{de^{-t^2}}{-t}\right|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt,$$

και τελικά:

$$erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{2x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3}\right) + R \tag{1.2}$$

όπου

$$R = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{16 t^8} dt$$

Μέχρι το σημείο αυτό δεν έχουμε κάνει ουδεμία προσέγγιση. θα ήταν καλό αν μπορούσαμε να αμελήσουμε το υπόλοιπο R. Ενώ η παραπάνω σειρά για κάθε x αποκλίνει, για δεδομένο αριθμό όρων αν $x \to \infty$ επειδή $R \approx x^{-9}$ προσεγγίζει την συνάρτηση λάθους. Κατασκευάσαμε έτσι ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης λάθους.

ΑΣΚΗΣΗ

Άσκηση 3. *Υπολογίστε στον υπολογιστή τις τιμές του ασυμπτωτικού αναπτύγματος (1.2) για* $0.1 \leq x \leq 5$ *και σχεδιάστε το μαζύ με τη συνάρτηση λάθους στο ίδιο διάστημα.*

Άσκηση σε WKB

Θεωρήστε τον ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + f(t)x = 0.$$

με συχνότητα $\omega^2 = f(t) > 0$. Γράψτε τη WKB λύση στο πρόβλημα αυτό και δείξτε ότι αυτή είναι ακριβής αν:

$$\frac{1}{2}\frac{f'}{f^{3/2}} << 1.$$

Προσδιορίστε επίσης την επόμενη προσέγγιση πέραν της WKB σε αυτό το πρόβλημα. Θεωρήστε την ειδική περίπτωση $f(t) = t$, και εκτιμείστε τη συμπεριφορά της λύσης όταν $t \to \infty$. Με τον τρόπο αυτό υπολογίσατε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Airy.