22.11.2005

Θεώρημα της Noether

Στην κατασκευή της λαγκρανζιανής ελεύθερου σωματιδίου αποτυπώνονται οι συμμετρίες του κόσμου.
Τι σημαίνουν λοιπόν οι συμμετρίες της λαγκρανζιανής;
Θα δούμε ότι οι μετασχηματισμοί που αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη αντιστοιχούν σε διατηρήσιμες ποσότητες.

$$S = \frac{1}{2} m \frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{t_2 - t_1}$$

* $\vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \varepsilon \vec{a}$ η δράση παραμένει αναλλοίωτη σε τέτοιον μετασχηματισμό
* $t \longrightarrow t + \varepsilon$ ομοίως

Μετασχηματισμοί που αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη λέγονται <u>συμμετρίες</u>.
Θα ασχοληθούμε με <u>συνεχείς</u> μετασχηματισμούς:

$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t, \varepsilon)$ με την ιδιότητα $Q_i = q_i$ όταν $\varepsilon = 0$.
Αυτός είναι συνεχής μετασχηματισμός.
<u>π.χ.</u> $\vec{X}(\varepsilon) = \vec{x} + \varepsilon \vec{a}$, $\vec{a}$: σταθερό διάνυσμα
Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς ε.
$-T(\varepsilon) = t + \varepsilon$ συνεχής μετασχηματισμός χρόνου: χρονική μετάθεση

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1, \dots, q_n, \varepsilon) \\ T(\varepsilon) &= T(t, q_1, \dots, q_n, \varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

Έχουμε συμμετρία όταν η δράση στις καινούριες συντεταγμένες και η δράση στις "παλιές" συντεταγμένες έχουν τη σχέση

$$S(\varepsilon) - S(0) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

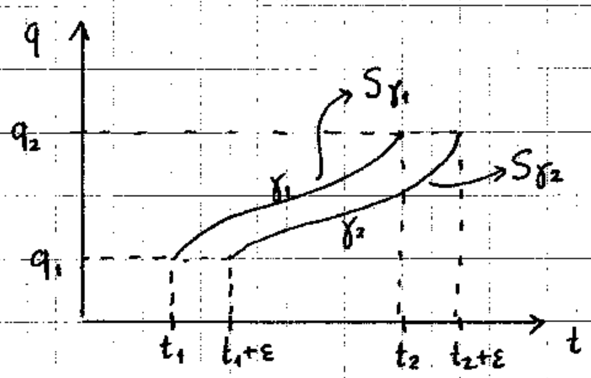
όπου $\quad S(0) = S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt$ Η λαγκρανζιανή είναι η ίδια

$\quad S(\varepsilon) = \int_{T_1}^{T_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dT}, T\right) dT$ ακριβώς συνάρτηση, με μεταβλητές $q,\dot{q},t$ ή $Q,\dot{Q},T$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα : Έστω $L(q,\dot{q})$ και ο μετασχηματισμός

$$\begin{Bmatrix} Q = q \\ T = t+\varepsilon \end{Bmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι αυτός αποτελεί συμμετρία της συγκεκριμένης λαγκρανζιανής.



Έχουμε μια μετάθεση της καμπύλης στο χρόνο κατά ε.

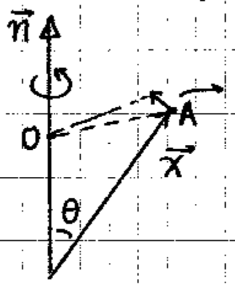
$Q(T) = q(T-\varepsilon)$ οπότε η λαγκρανζιανή τώρα θα είναι

$$L\left(Q(T), \frac{dQ}{dT}\right) = L\left(q(T-\varepsilon), \frac{dq(T-\varepsilon)}{dT}\right)$$ οπότε

$$\int_{T_1}^{T_2} L\left(q(T-\varepsilon), \frac{dq(T-\varepsilon)}{dT}\right) dT = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq}{dt}\right) dt$$

έχοντας κάνει αλλαγή μεταβλητής από $T \to t$, με $T_1 = t_1 + \varepsilon$ και $T_2 = t_2 + \varepsilon$

→ Μετασχηματισμός στροφής $\vec{X}(\varepsilon) = R_{\vec{n}}(\varepsilon)\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon\vec{n}\times\vec{x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ στροφή ως προς τον άξονα $\vec{n}$.



$\Delta\vec{x} = \vec{n}\times\vec{x}$ σε πρώτη προσέγγιση το $\Delta\vec{x}$ είναι κάθετο στα $\vec{n}$ και $\vec{x}$

Είναι $|\vec{n}\times\vec{x}| = |\vec{x}|\sin\theta = (OA)$ όπου έχουμε θέσει $|\vec{n}| = 1$: το $\vec{n}$ μοναδιαίο.

Ένας μετασχηματισμός προσδιορίζεται πλήρως από τον όρο σε τάξη ε.
Στη στροφή για παράδειγμα

$$\frac{d\vec{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \vec{n} \times \vec{x}$$

Αυτό το μέρος του μετασχηματισμού ονομάζεται <u>γεννήτορας</u>.

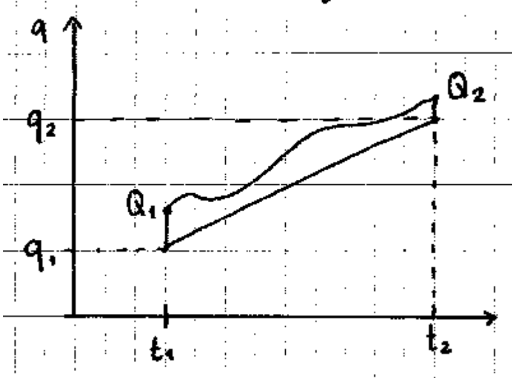
$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m|\dot{\vec{x}}|^2 \rightarrow$ μετά το μετασχηματισμό $\mathcal{L}(\varepsilon) = \frac{1}{2} m|\dot{\vec{x}} + \varepsilon \vec{n} \times \dot{\vec{x}}|^2 =$

$$= \frac{1}{2} m|\dot{\vec{x}}|^2 + \underbrace{\cancel{\varepsilon m \dot{\vec{x}} (\vec{n} \times \dot{\vec{x}})}}_{0} + \frac{1}{2} m \varepsilon^2 |\vec{n} \times \dot{\vec{x}}|^2$$

Οπότε $\mathcal{L}(\varepsilon) - \mathcal{L} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$! Συνεπώς στον μετασχηματισμό

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X}(\varepsilon) = \vec{x} + \varepsilon \vec{n} \times \vec{x} \\ T(\varepsilon) = t \end{array} \right\}$$ η δράση $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ μεταβάλλεται κατά ε^2.

Όταν έχουμε μόνο χωρικό μετασχηματισμό $(T = t)$, συνεχή ως προς ε και ταυτοτικό για $\varepsilon = 0$:



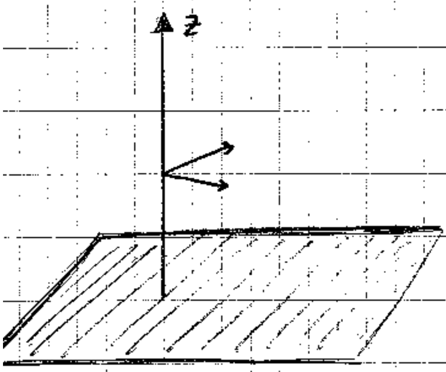
$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, t, \varepsilon)$$

$\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0$ τότε η απαίτηση αυτή

μεταφέρεται στη λαγκρανζιανή $\frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0$.

Αν έχουμε μετασχηματισμό και στο χρόνο, η παραπάνω καμπύλη δε μεταφέρεται μόνο ως προς τον q-άξονα αλλά και ως προς τον t-άξονα και τώρα μεταβάλλονται και τα όρια ολοκλήρωσης στην $\int \mathcal{L} dt$ (που στην περίπτωση $T = t$ δεν αλλάζουν και μας επιτρέπουν να περάσουμε την παραπάνω απαίτηση από τη δράση στη λαγκρανζιανή).

Παράδειγμα: βαρυτική ύλη συγκεντρωμένη ομογενώς σε άπειρο επίπεδο. Τι συμμετρίες υπάρχουν;



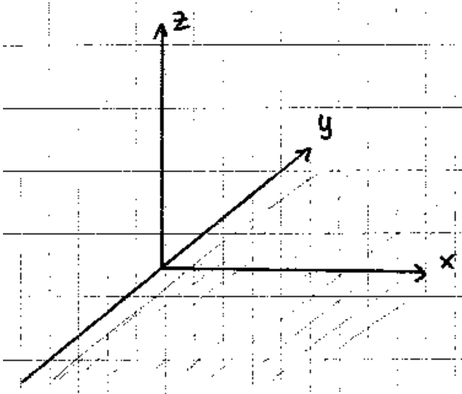
$$\left.\begin{aligned} x(\varepsilon) &= x + \varepsilon a \\ y(\varepsilon) &= y + \varepsilon a \end{aligned}\right\} \text{ μεταθέσεις στους άξονες } x, y$$

(1) Υπολογίστε το δυναμικό $\Phi(z)$

$$\left.\begin{aligned} \text{Στροφές: } & \vec{x}(\varepsilon) = \vec{x} + \varepsilon \vec{z} \times \vec{x} \\ \text{Χρονική μετάθεση: } & t \to t + \varepsilon \end{aligned}\right\}$$

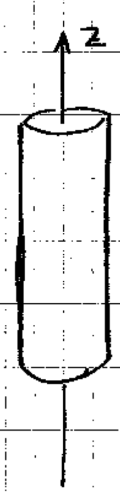
Ο κατοπτρισμός είναι συμμετρία αλλά <u>δεν είναι συνεχής</u> μετασχηματισμός.

Ας θεωρήσουμε τώρα <u>ημιεπίπεδο</u>. Τι συμμετρίες έχουμε;



Μετάθεση ως προς τον y άξονα: συμμετρία. Επίσης και η χρονική μετάθεση είναι συμμετρία. Από 4 συμμετρίες λοιπόν έχουν μείνει 2.

Παράδειγμα: βαρυτική ύλη κατανεμημένη στην επιφάνεια κυλίνδρου.

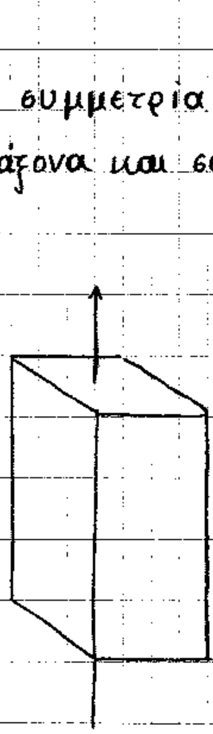


(2) Υπολογισμός δυναμικού κυλινδρικού φλοιού ομογενούς πυκνότητας.

$$\text{Συμμετρίες} \left\{\begin{aligned} & Z(\varepsilon) = z + \varepsilon a \\ & \text{Στροφές ως προς τον } z\text{-άξονα} \\ & T = t + \varepsilon \end{aligned}\right.$$

Παράδειγμα: σφαίρα (π.χ. πλανήτης σφαιρικός). Η συμμετρία εδώ θα είναι σε στροφές ως προς οποιονδήποτε άξονα και σε χρονική μετάθεση.

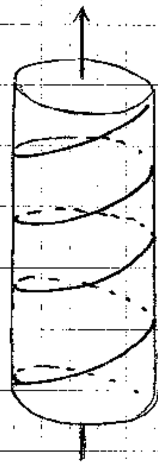
— Άπειρο N-γωνικό πρίσμα π.χ. τετραγωνικό:



$$\left.\begin{array}{l} Z(\varepsilon) \to z+\varepsilon a \\ T = t+\varepsilon \end{array}\right\} \text{συμμετρίες}$$

Κανονικό N-γωνο: συμμετρία σε στροφές $\frac{2\pi}{N}$, ωστόσο δεν είναι συνεχής συμμετρία.

— Κανονικός κώνος: συμμετρία ως προς στροφές στον άξονα z και χρονικές μεταθέσεις.



— Ύλη κατανεμημένη σε έλικα σε ορθό κώνο: υπάρχει συμμετρία ως προς μετατοπίσεις που ακολουθούν την ελικοειδή κίνηση της κατανομής.

(3) Γράψτε αυτήν τη συμμετρία και βρείτε τη διατηρήσιμη ποσότητα.

* Ποιες είναι λοιπόν οι αντιστοιχούσες διατηρούμενες ποσότητες για κάθε συμμετρία?

Κάθε μετασχηματισμός σε τάξη ε γράφεται ως:

$Q_i(\varepsilon) = q_i + \varepsilon K(q_i, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, K: γεννήτορας του μετασχηματισμού κάτω από τις προϋποθέσεις που έχουμε προαναφέρει.

Επίσης $T = t$.

Θα έχουμε λοιπόν $\mathcal{L}(Q, \frac{dQ}{dt}, t) = \mathcal{L}_\varepsilon$ όταν $\left.\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$

$\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = K_i$ και $\dot{Q}_i = \dot{q}_i + \varepsilon \dot{K}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ οπότε $\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \dot{K}_i$

Όλα είναι υπολογισμένα στο $\varepsilon=0$ άρα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

οπότε $\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\cdot \dot{K}_i$

Η αλλαγή γίνεται επί της φυσικής τροχιάς, οπότε έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \dot{p}_i K_i + p_i \dot{K}_i = \frac{d}{dt}(p_i K_i)$$

Άρα αν ο μετασχηματισμός είναι συμμετρία, $\frac{d}{dt}(p_i K_i) = 0$ οπότε η ποσότητα $p_i K_i$ διατηρείται.

Δηλ. η προβολή των γενικευμένων ορμών στην κατεύθυνση των γεννητόρων του μετασχηματισμού διατηρείται.

$$\boxed{\sum_i p_i K_i = \text{σταθ.}}$$

Παράδειγμα. Σύνολο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με νευτώνειες δυνάμεις

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum m_i |\dot{\vec{x}}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{j\neq i} V\left(|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}|\right)$ τα i, j μετρούν σωμάτια

Συμμετρίες $\vec{X}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{x}^{(i)} + \varepsilon\vec{a}$, $\vec{a}$: σταθερό διάνυσμα

Ο γεννήτορας του μετασχηματισμού είναι $\vec{K}^{(i)} = \vec{a}$

Το θεώρημα της Noether λέει ότι για τα σωματίδια η ποσότητα $\sum \vec{K}^{(i)} \vec{p}^{(i)}$ διατηρείται, δηλαδή $\vec{a}\cdot\sum_i \vec{p}^{(i)}$ διατηρείται για τυχαίο $\vec{a}$, που σημαίνει τελικά ότι η ολική ορμή $\sum_i \vec{p}^{(i)}$ του συστήματος διατηρείται.

- $\vec{X}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{x}^{(i)} + \varepsilon \vec{\eta} \wedge \vec{x}^{(i)}$

Ο γεννήτορας τώρα είναι $\vec{K}^{(i)} = \vec{\eta} \wedge \vec{x}^{(i)}$

$\sum_i (\vec{\eta} \wedge \vec{x}^{(i)}) \cdot \vec{p}^{(i)} = \vec{\eta} \sum_i (\vec{x}^{(i)} \wedge \vec{p}^{(i)})$ δηλαδή η ολική στροφορμή του συστήματος $\sum_i (\vec{x}^{(i)} \wedge \vec{p}^{(i)})$ διατηρείται. Λόγω του τριδιάστατου συστήματος έχουμε 3 διατηρούμενες συνιστώσες ορμής και 3 διατηρούμενες συνιστώσες στροφορμής.

- $\begin{cases} \vec{X}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{x}^{(i)} + \varepsilon \vec{V} t \\ T(\varepsilon) = t \end{cases}$ Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός

Ο γεννήτορας τώρα είναι $\vec{K}^{(i)} = \vec{V} \cdot t$. Θυμόμαστε ότι ο γαλιλαϊκός μετασχηματισμός επάγει έναν μετασχηματισμό βαθμονόμησης στην λαγκρανζιανή:

$$L_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\vec{x}}^{(i)}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}|) + \underbrace{\varepsilon \vec{V} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}^{(i)}}_{= \frac{d}{dt}\left(\varepsilon \vec{V} \sum_i m_i \vec{x}^{(i)}\right)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \neq 0$ σε αυτήν την περίπτωση. Τι διατηρείται τώρα;

Το ερώτημα αυτό θα απαντηθεί στην επόμενη διάλεξη.