16.11.2005

$$\frac{dx}{dt} = \vec{V}(\vec{x},t) \quad , \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Χαμιλτονιανό σύστημα $\quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad\quad \vec{V} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots \right]$$

$$x_0 \xrightarrow{g^t} x(x_0,t) \xrightarrow{g^{\delta t}} x(x_0, t+\delta t)$$

$J(t)$: εξέλιξη του όγκου στον φασικό χώρο, για την Ιακωβιανή ισχύει

$$J(t+\delta t) = J(\delta t) \cdot J(t)$$

$$x_i(t+\delta t) = x_i(t) + \delta t\, V_i(x_i(t),t) + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

$$J(\delta t) = \det\left[\frac{\partial x_i(t+\delta t)}{\partial x_j(t)}\right] \simeq \det\left[I + \delta t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \mathcal{O}(\delta t^2)\right] =$$

$$\simeq 1 + \delta t\, \vec{\nabla} \vec{V} + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Επομένως $J(t+\delta t) = \left[1 + \delta t\, \vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \mathcal{O}(\delta t^2)\right] J(t)$

$$\frac{J(t+\delta t) - J(t)}{\delta t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\, J(t) + \mathcal{O}(\delta t) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{J}\cdot\frac{dJ}{dt} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της Ιακωβιανής ισούται με την απόκλιση του γενικευμένου διανυσματικού πεδίου $\vec{V}$.

$$\vec{V} = \mathbb{A} x$$

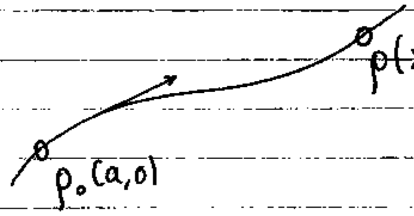
$$V_i = A_{ij} x_j \longrightarrow \vec{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} x_j = A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = \mathrm{trace}(\mathbb{A})$$

Η απόκλιση αυτού του διανυσματικού πεδίου είναι το ίχνος του $\mathbb{A}$.

Πυκνότητα $\rho(\vec{x},t)$ στον χώρο των φάσεων.

Για χαμιλτονιανά συστήματα $\vec{\nabla}\vec{V}=0$: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\,\vec{\nabla}\rho=0=\dfrac{D\rho}{Dt}$

(παραγώγιση του ρ ακολουθώντας τη ροή)



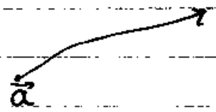
$\rho(x(a,t),t)=\rho_o(a,0)$

$\rho_o(a,0)$

Η πυκνότητα δηλαδή δεν αλλάζει ακολουθώντας τη ροή

Πεδιακή θεώρηση: $\rho(x,t)$ γνωρίζω την πυκνότητα σε κάθε σημείο του χώρου & χρονική στιγμή (Euleriann θεώρηση)

Διαφορετικά: θεώρηση της ρ ως συνάρτηση της κίνησης ενός σημείου. Χρησιμεύει π.χ. σε προβλήματα διάχυσης



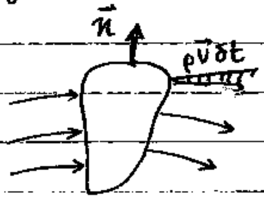
$\vec{a}$ $\quad x(a,t)$

↳ $\rho(a,t)$ → συνάρτηση του σημείου από το οποίο ξεκίνησε η κίνηση.

Τότε έχουμε: $\dfrac{D\rho}{Dt}=\left.\dfrac{\partial\rho_L}{\partial t}\right|_a$ Λαγκρανζιανή θεώρηση

Στη λαγκρανζιανή θεώρηση δηλαδή παρακολουθούμε την κίνηση.

Σταθερός όγκος στον χώρο φάσεων: οι καταστάσεις του συστήματος μπαίνουν και βγαίνουν από αυτόν. Ο αριθμός καταστάσεων στον όγκο αυτόν είναι



$$\frac{d}{dt}\int\rho\,dV=-\int\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=-\int\vec{\nabla}(\rho\vec{V})\,dV$$

πεδιακή θεώρηση → μερική παραγώγιση ως προς το χρόνο

οπότε $\displaystyle\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho\vec{V})\right)dV=0$

αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε dV : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla}\vec{V} = -\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}$$

πόσο αλλάζει το ρ ακολουθώντας τη ροή.

Για χαμιλτονιανό σύστημα $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$ οπότε $\frac{D\rho}{Dt}=0$ δηλαδή η πυκνότητα παραμένει σταθερή ακολουθώντας την κίνηση

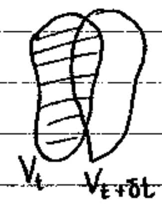
Χαμιλτονιανό σύστημα : παίρνω μία μεταβλητή $F(q,p,t)$ (πεδιακή θεώρηση). Έχω

$$\frac{dF}{dt} = \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}F$$

$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}F = D_H F = [F, H]$ → αγκύλη Poisson

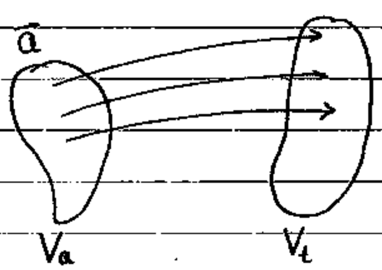
$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla} = \dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Παίρνω τώρα έναν όγκο που τον αφήνω να κινείται με τη ροή



$\frac{d}{dt}\int_{V_t}\rho\, dV = 0$ αν δεν έχω πηγές (σταθερός αριθμός καταστάσεων)

Ανάγω τώρα τα σημεία του όγκου V_t σε μια αρχική κατάσταση από την οποία εξελίχθηκαν.



$\frac{d}{dt}\int \rho(a,t)\, J\, dV_a$

και τώρα ο όγκος V_a είναι σταθερός
η εξέλιξη στο χρόνο είναι στο ρ και το J

$$\frac{d}{dt}\int \rho(a,t) J\, dV_a = \int_{V_a} \underbrace{\left.\frac{\partial \rho(a,t)}{\partial t}\right|_a}_{\substack{\text{αυτό είναι η} \\ \text{ολική παράγωγος} \\ \text{στην πεδιακή θεώρηση}}} J \cdot dV_a + \int_{V_a} \rho(a,t) \underbrace{\frac{dJ}{dt}}_{= J \vec{\nabla}\vec{V}} dV_a$$

$$= \int_{V_t} \frac{D\rho}{Dt} dV + \int_{V_t} \rho \vec{\nabla}\vec{V} dV = \int_{V_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla}\vec{V} \right) dV = 0$$

Επομένως $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla}\vec{V}$

Παρατηρήσεις.

1. $\frac{d}{dt}\int_{V_t} F(\rho)\, dV = \int_{V_t} \frac{DF(\rho)}{Dt} dV$ για Χαμιλτονιανά συστήματα

2. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Εξίσωση Liouville (πεδιακή θεώρηση)

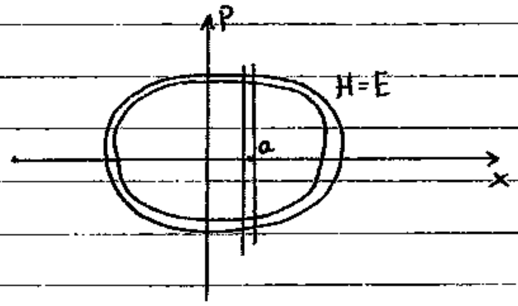
που σημαίνει $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\vec{\nabla}\rho = 0$, δηλ. $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho_{EQ} = 0$

ακολουθώντας την κίνηση δεν αλλάζει η H: $\rho_{EQ} = f(H)$.

Η ρ_{EQ} αντιστοιχεί σε κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

Ζητάμε τώρα να υπολογίσουμε την πιθανότητα για ένα Χαμιλτονιανό σύστημα $H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$ το σωματίδιο να βρίσκεται στη θέση a.

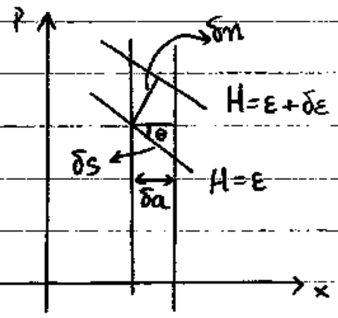
(δηλ. ζητάμε την κατανομή της πιθανότητας), για σταθερή ενέργεια $H = E$.



Η πιθανότητα που ζητάμε μπορεί να γραφεί ως:

$$|\psi_E(a)|^2 \quad ή \quad \langle a|E\rangle^2$$

Ουσιαστικά θέλω να βρω την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε περιοχή πλάτους δa. Επίσης θεωρώ και μια αβεβαιότητα στην ενέργεια δE.



$$\tan\theta = \frac{\dot{p}}{\dot{q}}$$

$$\delta n = \frac{\delta \varepsilon}{|\vec{\nabla} H|} = \frac{\delta\varepsilon}{|\vec{v}|}$$

$$\delta A = \delta s \cdot \delta n = \frac{\delta\varepsilon}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\delta a}{\cos\theta} = \frac{\delta\varepsilon \cdot \delta a}{|\vec{v}| \cdot \cos\theta}$$

αλλά $|\vec{v}| \cdot \cos\theta = \dot{q}$ οπότε $\delta A = \dfrac{\delta\varepsilon\,\delta a}{\dot{q}}$

δηλαδή $P(a) \sim \dfrac{1}{\dot{q}(a)} \sim \dfrac{1}{p(a)}$ όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα στο σημείο τόσο μικρότερη η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο συγκεκριμένο σημείο

Αυστηρός υπολογισμός:

$\rho = \delta(x - x_t)\delta(p - p_t)$ για το σωματίδιο. Για να υπολογίσω την πιθανότητα που ζητώ πρέπει να υπολογίσω το

$$\int dx\, dp\, \delta(x-a)\rho(x,p) = \int dx\, \delta(x - x_t)\delta(x-a) = \delta(a - x_t)$$

άρα πρέπει να υπολογίσουμε το $P(a) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int dt\, \delta(x_t - a)$

$$\int \delta(f(x))\,dx = \sum_i \delta\big((x-x_i)f'(x_i)\big)\,dx = \sum \frac{1}{|f'(x_i)|}$$

όπου τα x_i είναι οι ρίζες της συνάρτησης f.

Επομένως $\quad P(a) = \frac{1}{T}\int dt\,\delta(x_t - a) = \frac{1}{T}\cdot\frac{2}{\left|\frac{dx}{dt}\right|_{x(t)=a}}$

το "2" επειδή το x_t περνάει 2 φορές από το σημείο a

→ Δείξτε ότι $\int P(a)\,da = 1$

* 2ος τρόπος *

Γράφω απλά $\quad \rho(q,p) = A\cdot\delta(E-H)$

$$\iint \rho(q,p)\,dq\,dp = 1 \quad = A\iint \delta\left(\frac{p^2}{2m} + V(x) - E\right)dx\,dp =$$

$$= A\int dx \int \delta\left(\frac{p^2}{2m} + (E - V(x))\right)dp$$

Ρίζες της παράστασης $\quad p = \pm\sqrt{2m(E-V(x))}$

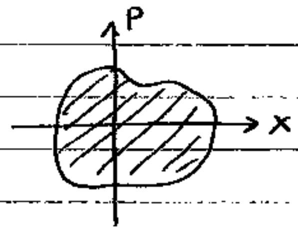
$$f(p) = \frac{p^2}{2m} \rightarrow f'(p) = \frac{p}{m}$$

άρα $\quad A\int dx \int \delta\left(\frac{p^2}{2m} + (E - V(x))\right)dp = A\int dx\,\frac{2m}{|p(x)|} = \int dx\,\frac{2}{|v|} = A2\int dt = A\cdot T$

$\left[\, v = \frac{dx}{dt} \,\right]$

διαφορετικά $\quad \int \delta(E-H)\,dq\,dp = \int \frac{d}{dE}\Theta(E-H)\,dq\,dp =$

$$= \frac{d}{dE}\int \Theta(E-H)\,dq\,dp = \frac{d\mathcal{E}}{dE} = T$$



$\mathcal{E}$: εμβαδόν του περικλειόμενου χωρίου