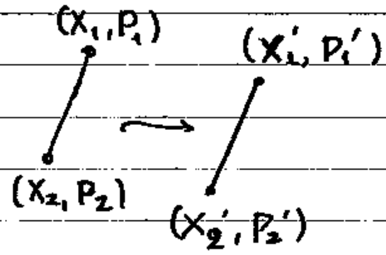
15.11.2005

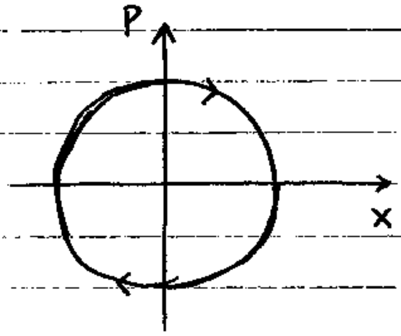
Έχουμε αρμονικό ταλαντωτή. Η χαμιλτονιανή του είναι $H=\frac{p^2}{2}+\omega^2\frac{x^2}{2}$. Ψάχνουμε να βρούμε αν κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος η απόσταση μεταξύ δύο σημείων (X_1,P_1), (X_2,P_2) μεταβάλλεται ή όχι.



Αρχικά παίρνουμε την περίπτωση όπου $\omega=1$ δηλαδή η χαμιλτονιανή γίνεται

$$H=\frac{1}{2}\left(p^2+x^2\right)$$

και οι καμπύλες σταθερού H στον φασικό χώρο είναι κύκλοι.



Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι

$$D=(X_2-X_1)^2+(P_2-P_1)^2.$$

Έχουμε

$$\frac{dD}{dt}=2(X_2-X_1)(\dot X_2-\dot X_1)+2(P_2-P_1)(\dot P_2-\dot P_1)$$

Από τις εξισώσεις Hamilton όμως έχουμε:

$$\dot X_1=\frac{\partial H}{\partial P_1}=P_1,\quad \dot X_2=\frac{\partial H}{\partial P_2}=P_2 \quad \text{και}$$

$$\dot P_1=-\frac{\partial H}{\partial X_1}=-X_1,\quad \dot P_2=-\frac{\partial H}{\partial X_2}=-X_2 \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{dD}{dt}=2(X_2-X_1)(P_2-P_1)-2(X_2-X_1)(P_2-P_1)=0 \quad \text{και επομένως}$$

σε αυτήν την περίπτωση η απόσταση μεταξύ δύο σημείων παραμένει σταθερή.

Στην περίπτωση όπου $\omega\neq 1$ έχουμε $H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2$

οπότε είναι:

$$\frac{dD}{dt} = 2(X_2-X_1)(P_2-P_1) - 2(P_2-P_1)\,\omega^2(X_2-X_1) =$$

$$= 2(1-\omega^2)(X_2-X_1)(P_2-P_1).$$ Όμως $\dot{X}_1 = P_1$, $\dot{X}_2 = P_2$

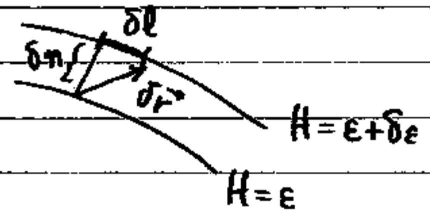
άρα $$\frac{dD}{dt} = (1-\omega)\frac{d}{dt}(X_2-X_1)^2$$

Αυτό που βλέπουμε από αυτήν την σχέση είναι ότι υπάρχει μια άλλη ποσότητα που παραμένει σταθερή:

$$\frac{d}{dt}\left(D_p + \omega^2 D_x\right) = 0$$

όπου D: συμβολίζει την απόσταση, $D_p = (P_2-P_1)^2$
Η παραπάνω έκφραση ισοδυναμεί με τη διατήρηση της ενέργειας στον αρμονικό ταλαντωτή, όπως μπορούμε να δούμε από τη μορφή της σχέσης.

Το μήκος λοιπόν πάνω σε μια καμπύλη $H = ct$ δεν παραμένει σταθερό. Το $\delta \ell$ δηλαδή θα μεταβάλλεται με τη χρονική εξέλιξη του συστήματος. Αυτό όμως που παραμένει σταθερό είναι το εμβαδόν:



$$\delta n \cdot \delta \ell = \text{σταθ.}$$

Όπως έχουμε δει, είναι $dH = \delta\varepsilon = \vec{\nabla} H \cdot d\vec{r}$
δηλαδή

$$\delta\varepsilon = |\vec{\nabla} H| \cdot \delta n \Rightarrow \delta n = \frac{\delta\varepsilon}{|\vec{\nabla} H|}$$

αυτό σημαίνει ότι $\dfrac{\delta\varepsilon}{|\vec{\nabla} H|} \cdot \delta\ell = \text{σταθ}$ ή $d\varepsilon \dfrac{d\ell}{|\vec{\nabla} H|} = \text{σταθ.}$

Η ποσότητα $\dfrac{d\ell}{|\vec{\nabla} H|}$ ονομάζεται μέτρο του Gibbs.

'Άσκηση 1:

Βρείτε το μέτρο Gibbs $\frac{dl}{|\vec{\nabla} H|}$ στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή.

'Άσκηση 2 προηγούμενης διάλεξης: λύση

$\mathbb{A} = S \Lambda S^{-1}$ όπου $\det(\mathbb{A}) = \det(\Lambda)$. Ο Λ είναι διαγώνιος δηλ. διαγωνιοποιήσαμε τον $\mathbb{A}$.

$\det(\Lambda) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ και $\det(e^{\mathbb{A}}) = \det(e^{\Lambda})$

$$\det(e^{\Lambda}) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \ldots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = e^{\operatorname{trace} \mathbb{A}}$$

Διαφορετικά: το $\frac{dx}{dt} = \mathbb{A} x$ ορίζει ροή στον χώρο των x.

$x(t) = e^{\mathbb{A} t} x(0)$

$e^{\mathbb{A} t}$: διαδότης (περιέχει την πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος).

Θυμόμαστε $e^{\mathbb{A} t} = \mathbb{I} + \mathbb{A} t + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} t^2 + \frac{\mathbb{A}^3}{3!} t^3 + \frac{\mathbb{A}^4 t^4}{4!} + \ldots$

$x(t) = e^{\mathbb{A} t} x(0) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(e^{\mathbb{A} t})}{dt} x(0)$ επειδή

$x(0)$: σταθερό. Παραγωγίζουμε την έκφραση που δίνει το $e^{\mathbb{A} t}$:

$$\frac{d e^{\mathbb{A} t}}{dt} = 0 + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 t + \frac{\mathbb{A}^3 t^2}{2!} + \frac{\mathbb{A}^4 t^3}{3!} + \ldots$$

$$= \mathbb{A}\left(\mathbb{I} + \mathbb{A} t + \frac{\mathbb{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbb{A}^3 t^3}{3!} + \ldots\right) = \mathbb{A} e^{\mathbb{A} t}$$

'Άσκηση 2: πάρτε ως $\mathbb{A}$ το d/dt. Τι βγαίνει?

* Το $\mathbb{A}$ δεν είναι απαραίτητο να είναι πίνακας ή αριθμός. Είναι οποιοδήποτε αντικείμενο.

π.χ. $e^{a\frac{d}{dt}} = 1 + a\frac{d}{dt} + \frac{a^2}{2!}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{d^3}{dt^3} + \frac{a^4}{4!}\frac{d^4}{dt^4} + \dots$

Αυτό είναι ένας διαφορικός τελεστής που δρα σε μια συνάρτηση $f(t)$:

$$e^{a\frac{d}{dt}}f(t) = f(t) + a\frac{df(t)}{dt} + \frac{a^2}{2!}\cdot\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \frac{a^3}{3!}\cdot\frac{d^3f(t)}{dt^3} + \dots$$

$e^{a\frac{d}{dt}}f(t) = f(t+a)$ ο τελεστής αυτός κάνει μετάθεση στον χρόνο!

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det\left(e^{\mathbb{A}t}\right) = J(t)$

$t=0 \Longrightarrow \det\left(e^{\mathbb{A}t}\right) = 1$

$\frac{dJ}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{J(t)-J(0)}{t}$ ή $\frac{dJ}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{J(t+\delta t)-J(t)}{\delta t}$

* $e^{\mathbb{A}t+\mathbb{A}\delta t} = e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{A}\delta t}$

γενικά $e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t} \neq e^{(\mathbb{A}+\mathbb{B})t}$ Η ισότητα ισχύει μόνο όταν τα $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$ αντιμετατίθενται

$$\det\left(e^{\mathbb{A}t+\mathbb{A}\delta t}\right) = \det\left(e^{\mathbb{A}t}\right)\cdot\det\left(e^{\mathbb{A}\delta t}\right)$$

οπότε $\lim_{\delta t\to 0}\left[\det\left(e^{\mathbb{A}t}\right)\cdot\frac{\det\left(e^{\mathbb{A}\delta t}\right)-1}{\delta t}\right]$

$$\det\left(e^{\mathbb{A}\delta t}\right) = \det\left(\mathbb{I} + \mathbb{A}\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)\right) = 1 + \delta t\cdot \mathrm{trace}(\mathbb{A}) + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Επομένως $\frac{dJ}{dt} = \mathrm{trace}(\mathbb{A})\cdot J \Rightarrow J = \exp\left[\int_0^t \mathrm{trace}(\mathbb{A}(s))\,ds\right]$

π.χ. $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{bmatrix} x$

$\downarrow$

$\mathrm{trace}(\mathbb{A}) = 0$ οπότε ο όγκος δεν αλλάζει σε αυτήν την περίπτωση

<u>Απόδειξη Θεωρήματος Poincaré</u>

Οσοδήποτε μικρό χωρίο B_o : το σύστημα θα βρεθεί και πάλι εκεί αν περιμένω αρκετά. Μιλάμε για πεπερασμένο χώρο, κινούμαστε στο χώρο των φάσεων.

Ορίζουμε Γ_t την απεικόνιση όλων των σημείων του B_o για κάθε χρόνο $t > 0$.

$\Gamma_t = \bigcup_{t>0} B_t$

Ορίζω χρόνο τ και $\Gamma_\tau = \bigcup_{t>\tau} B_t$. Προφανώς $\Gamma_\tau \subset \Gamma_t$

Θ. Liouville: $\Gamma_t \xrightarrow{\tau} \Gamma_\tau$ οπότε $\Omega_{\Gamma_t} = \Omega_{\Gamma_\tau}$ (Ω: όγκος)

Εφόσον Γ_τ και Γ_t έχουν το ίδιο μέτρο και $\Gamma_\tau \subset \Gamma_t$ επομένως το B_o ανήκει και στο Γ_τ! Επομένως το σύστημα θα επανέρχεται στο B_o για πάντα.

Είχαμε συμβολίσει ρ : πυκνότητα καταστάσεων στη συλλογή συστημάτων ή εκτίμηση πιθανότητας

$\rho = \rho(q,p,t)$ και $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

$\rho_o dV_o = \rho_t dV_t$ και από Θ. Liouville $dV_t = dV_o \Rightarrow \rho_t = \rho_o$

δηλαδή δεν υπάρχει καμία διάχυση στο "ensemble fluid".
Αυτό μαθηματικά εκφράζεται ως: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}+\vec{V}\delta t \qquad \lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho(\vec{x}+\vec{V}\delta t, t+\delta t) - \rho(\vec{x},t)}{\delta t} = 0 = \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\rho_t(q,p,t) = \rho\left(q_t(q_0,p_0,t), p_t(q_0,p_0,t), t\right) = \rho(q_0,p_0,t)$$

Το παραπάνω όριο ορίζει την παράγωγο Lie: $\frac{D\rho}{Dt}$ την παράγωγο που ακολουθεί την κίνηση.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho(\vec{x},t) + \vec{V}\delta t \cdot \vec{\nabla}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}\cdot \delta t - \rho(\vec{x},t)}{\delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho$$

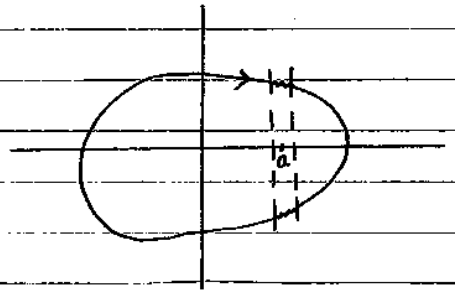
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\frac{\partial \rho}{\partial p_i} = 0$$ στη θεώρηση Hamilton

δηλαδή ορίζοντας τον γραμμικό τελεστή $D_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -D_H\rho}$$ Εξίσωση Liouville

$$\rightarrow \quad \rho = e^{-tD_H}\rho_0$$

Πρόβλημα: $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ σύστημα με περιοδικές κινήσεις.



Θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα το σωματίδιο να είναι στη θέση a αν έχει ενέργεια E. $\langle a|E\rangle$

$\rho = \delta(x-x_t)\delta(p-p_t)$