8/11/2005

Συμπλήρωμα: μετασχηματισμοί Legendre

$f(x)$, $f''>0$ σταθερό πρόσημο καμπυλότητας

ορίζουμε $p=\frac{df(x)}{dx}$ (για να αντιστρέψω συνάρτηση πρέπει να είναι μονότονη, γι' αυτό $f''>0$)

$x=\frac{dg(p)}{dp}$. Η p είναι ο μετασχηματισμός Legendre της f.

Η συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα είναι $g(p)=x(p)\cdot p-f(x(p))$

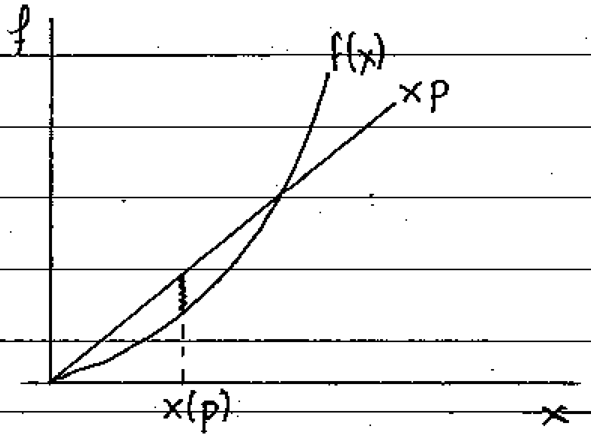
$$\frac{d^2g(p)}{dp^2}=\frac{dx(p)}{dp}=\frac{1}{dp/dx}=\frac{1}{f''}>0$$

και $g''(p)\cdot f''(x)=0$

Μπορεί να οριστεί συνάρτηση 2 μεταβλητών

$F(x,p)=xp-f(x)$

και ο μετασχηματισμός Legendre της f: $g(p)=\max(xp-f(x))$



μέγιστη απόσταση της xp από την f(x)

$g(p)=F(x(p),p)$

$xp-f(x)\le g(p)$ εξ' ορισμού, οπότε έχουμε την ανισότητα του Young: $x\,p\le f(x)+g(p)$

<u>π.χ.</u> $f(x) = \frac{x^a}{a}$ οπότε $p = x^{a-1}$, $x = p^{1/a-1}$

$$g(p) = p^{1/a-1}\, p - \frac{p^{a/a-1}}{a} = p^{a/a-1}\,\frac{a-1}{a} = \frac{p^\beta}{\beta}$$

όπου $\beta = \frac{a}{a-1}$. Άρα $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ όπου $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = 1$

Άρα η ανισότητα του Young γίνεται $xp \le \frac{x^a}{a} + \frac{p^\beta}{\beta}$

<u>π.χ.</u> $a=2$ άρα $\beta=2$ οπότε $2xp \le x^2+p^2$ (προφανές!)

$a=3$ άρα $\beta=\frac{3}{2}$ οπότε $xp \le \frac{x^3}{3} + \frac{2p^{3/2}}{3}$

→ Είχαμε την δράση: $S = \int_1^2 (p\dot{q} - H(p,q,t))\,dt$

<u>1ος τρόπος</u>

Θεωρούμε τα p, q ανεξάρτητα: $\begin{cases} p \longrightarrow p+\varepsilon\pi \\ q \longrightarrow q+\varepsilon\chi \end{cases}$

$$S(\varepsilon) = \int_1^2 \Big[(p+\varepsilon\pi)(\dot{q}+\varepsilon\dot{\chi}) - H(p+\varepsilon\pi, q+\varepsilon\chi, t)\Big]\,dt$$

$$= \int_1^2 \Big[p\dot{q} + p\dot{\chi}\varepsilon + \dot{q}\pi\varepsilon + \varepsilon^2\pi\dot{\chi} - H(p,q,t) - \frac{\partial H}{\partial p}\varepsilon\pi - \frac{\partial H}{\partial q}\varepsilon\chi\Big]dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= S(0) + \varepsilon\int_1^2 \Big[p\dot{\chi} + \dot{q}\pi - \frac{\partial H}{\partial p}\pi - \frac{\partial H}{\partial q}\chi\Big]dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Στασιμότητα δράσης: το ολοκλήρωμα τάξης ε πρέπει να είναι μηδενικό.

$\forall\, \pi, x$ πρέπει $\int_1^2 \left(p\dot{x} + \dot{q}\pi - \frac{\partial H}{\partial p}\pi - \frac{\partial H}{\partial q}x\right)dt = 0$

$\Rightarrow \left[px\right]_1^2 - \int_1^2 \dot{p}x\,dt + \int_1^2 \left(\dot{q}\pi - \frac{\partial H}{\partial p}\pi - \frac{\partial H}{\partial q}x\right)dt = 0$

Έχουμε κάνει παραγοντική ολοκλήρωση στο $\int_1^2 p\dot{x}\,dt$

Συγκεντρώνουμε όρους που περιέχουν το π ή το x:

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \left[px\right]_1^2 + \int_1^2 -x\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)dt + \int_1^2 \pi\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)dt$$

Απαιτούμε $x(1) = x(2) = 0$ (η διαδρομή αρχίζει και τελειώνει στα ίδια σημεία) και $\pi(1) = \pi(2) = 0$. Τα δύο ολοκληρώματα πρέπει να μηδενίζονται αφού π, x ανεξάρτητες μεταξύ τους (όπως τα p και τα q) οπότε καταλήγουμε στις εξισώσεις Hamilton.

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

2ος τρόπος: τα p, q δεν είναι ανεξάρτητα $\Rightarrow$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ μετασχηματισμός Legendre

Τότε ο όρος $\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0$ εκ κατασκευής και από το πρώτο ολοκλήρωμα προκύπτει $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

(1) $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) \quad \rightarrow \quad S = \int \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt$ ελαχιστοποίηση.

Αν η $\dot{q}$ δεν ξέραμε ότι εξαρτάται από το q, ποια αρχή θα βγάζαμε αντί για τις εξισώσεις Euler-Lagrange;

Γράψαμε προηγουμένως

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = p(2)\,x(2) - p(1)\,x(1) + \int_1^2 -x\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)dt + \int_1^2 \pi\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)dt$$

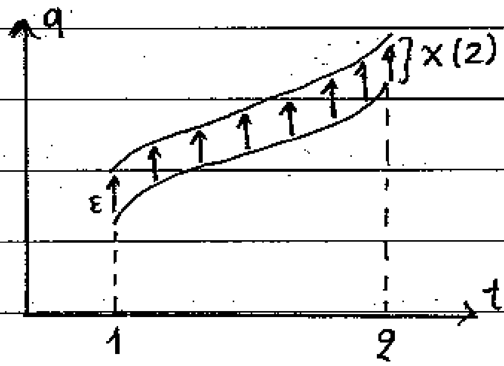
Αλλαγές που δε μηδενίζονται στα άκρα, γύρω από τη φυσική κίνηση. Σε αυτήν την περίπτωση τα ολοκληρώματα μηδενίζονται και

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = p(2)\,x(2) - p(1)\,x(1)$$

Αν $\partial S/\partial \varepsilon = 0$ τότε οι μεταβολές που είναι τέτοιες ώστε να μηδενίζουν την παραπάνω έκφραση δίνουν

$p(1)\,x(1) = p(2)\,x(2)$. Δηλαδή η ποσότητα $p(t)\,x(t)$ διατηρείται και αυτό ονομάζεται συμμετρία. (Θεώρημα Noether)

Έστω ότι κάνω μια μετάθεση μιας τροχιάς κατά την ίδια ποσότητα. Αν η δράση δε μεταβληθεί τότε $x(2) = \varepsilon$.



Τότε $x(2)\cdot p(t_2) - x(1)\,p(t_1) = 0$

$\varepsilon\, p(t_2) - \varepsilon\, p(t_1) = 0$ οπότε $p(t_1) = p(t_2)\ \forall\ t_1, t_2$

άρα σε αυτό το σύστημα η ορμή είναι σταθερή.

* Αν η δράση δε μεταβάλλεται σε χωρικές μεταθέσεις τότε η ορμή διατηρείται. *

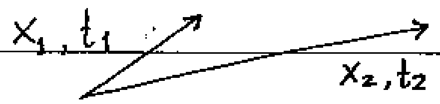
Θεωρώ ότι $x(1) = 0$. Τότε $\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = p(t_2)\, x(t_2)$ το οποίο

σημαίνει ότι $\left.\frac{\partial S}{\partial (\varepsilon x_2)}\right|_{t_2} = p(t_2)$ οπότε $p = \left.\frac{\partial S}{\partial x_2}\right|_{t_2}$

όπου $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$, L: υπολογισμένη στη φυσική τροχιά.

$S[q_\varphi] = S(t_1, x_1, t_2, x_2)$ οπότε η S από συναρτησοειδές γίνεται συνάρτηση.

Παράδειγμα : Ελεύθερο σωματίδιο



$$\vec{V} = \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{t_2 - t_1}$$

$$L = \frac{1}{2} m |\vec{V}|^2 = \frac{1}{2} m \frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{(t_2 - t_1)^2}$$

Η συνάρτηση δράση είναι $S = \int_1^2 \frac{1}{2} m \frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{(t_2 - t_1)^2} dt$

$S = \frac{1}{2} m \frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{t_2 - t_1}$ δράση ελεύθερου σωματιδίου

$= S(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2)$

Μετάθεση φυσικής τροχιάς: $x \to \vec{x}+\epsilon\vec{a}$ τότε η δράση δεν μεταβάλλεται. Ομοίως σε χρονική μετάθεση $t \to t+\epsilon\tau$. Οι μετασχηματισμοί που αφήνουν τη δράση μιας φυσικής τροχιάς αναλλοίωτη λέγεται συμμετρία. Έχουμε συμμετρία στις μεταθέσεις, στις στροφές, στις χρονικές μεταθέσεις.

Κάθε συμμετρία οδηγεί σε μια διατηρήσιμη ποσότητα.

Ερώτημα: γιατί για τη λαγκρανζιανή δύο ελεύθερων σωματιδίων δεν μπορώ να γράψω $L = L_1 \cdot L_2$;

Αν ίσχυε το γινόμενο, θα έπρεπε να ήταν το γινόμενο όλων των λαγκρανζιανών των ελεύθερων σωματιδίων στον κόσμο! Άρα θα είχαμε πληροφορία για το πόσα ελεύθερα σωματίδια έχουμε στον κόσμο!

Ας το ψάξουμε: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1 m_2 \dot{q}_2^2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 m_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{1}{2} m_1 \ddot{q}_1 \dot{q}_1 (m_2 \dot{q}_2) + m_2 \dot{q}_2 \ddot{q}_2 (m_1 \dot{q}_1)$$

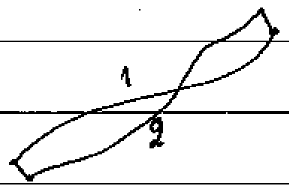
Δεν εξάγονται οι εξισώσεις κίνησης.

→ Γιατί ο Newton όρισε το δυναμικό με το μέτρο $|x_1-x_2|$ και όχι x_1-x_2?

Αν αλλάξουμε τη φορά του άξονα η δύναμη γίνεται από ελκτική απωστική η αντίστροφα· αυτό δεν έχει λόγο να συμβαίνει. Δεν έχει λόγο να αλλάζει η αλληλεπίδραση αν τους ανταλλάξουμε θέσεις.

(2) Δύναμη $F=\delta(x_1-x_2)$ μεταξύ σωματιδίων. Εδώ δε χρειάζεται απόλυτη τιμή γιατί η συνάρτηση δέλτα είναι άρτια. Μελετήστε την κίνηση.

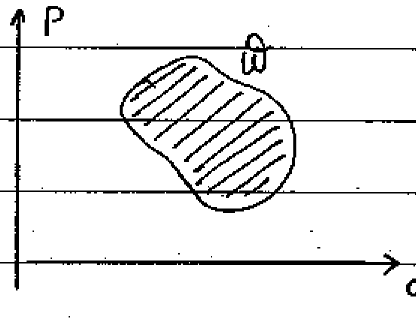
Αύριο θα πραγματευτούμε το εξής: θα θεωρήσουμε γενικότερες μεταβολές δράσης και θα αναζητήσουμε τη μεταβολή της δράσης από την τροχιά 1 στην τροχιά 2. Σκεφθείτε πώς κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει.



Θεώρημα Liouville

$$\left\{\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}\right\}$$

Εξισώσεις 1ου βαθμού ως προς q και p. Από κάθε σημείο στον χώρο q−p περνάει μία τροχιά, γιατί αρκούν τα q & p για να περιγράψουν την κίνηση στο φασικό χώρο.



Παίρνω ένα χωρίο στον χώρο των φάσεων. Αυτό περιλαμβάνει πολλά συστήματα: το ίδιο σωμάτιο σε διαφορετική θέση κ' με διαφορετική ορμή (συλλογή συστημάτων). Διαφορετικά, το χωρίο θα μπορούσε να είναι ο χώρος της αβεβαιότητας ενός σωματιδίου.

Κάθε σημείο του χωρίου εξελίσσεται, άρα το χωρίο μεταβάλλεται και αυτό. Έχουμε δηλαδή μία ροή (πάλι με τις αντίστοιχες 2 ερμηνείες). Μιλάμε για εξέλιξη του χωρίου σύμφωνα με τη χαμιλτονιανή δυναμική.

Ο όγκος του χωρίου αυτού παραμένει αναλλοίωτος!

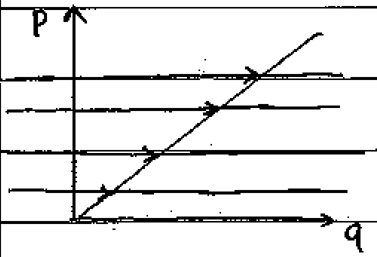
$$V(t) = \int_{\varpi} dq_1 \ldots dq_N dp_1 \ldots dp_N \,, \quad \frac{dV(t)}{dt} = 0$$

Αυτό είναι το θεώρημα του Liouville

(3) Έστω δύο σωματίδια τα οποία κάνουν μία ελαστική κρούση (m_1, m_2) σε μία διάσταση. Θεωρείστε ότι έχουν αρχική αβεβαιότητα στη θέση και στην ορμή $\delta x_1, \delta p_1$ και $\delta x_2, \delta p_2$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι κατά την κρούση η ποσότητα $\delta x_1 \delta p_1 \delta x_2 \delta p_2$ παραμένει αναλλοίωτη. Γράψτε την εξέλιξη του συστήματος (πριν και μετά την κρούση)

ως γραμμικό μετασχηματισμό.

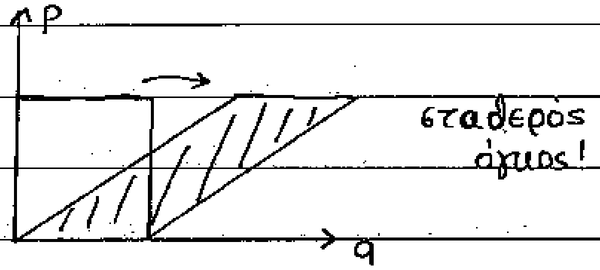
Π.χ. $H = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$ και $\dot{p} = 0$ (εξισώσεις Hamilton)



Η εξέλιξη θα είναι ευθείες γραμμές και η ταχύτητα θα μεγαλώνει γραμμικά με την απόσταση

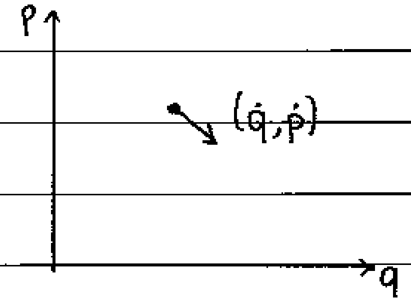
$x = \frac{p}{m}t + x_0$

Μετασχηματισμός χωρίου:



Π.χ. αρμονικός ταλαντωτής $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}$

Έστω $H(q,p)$ ανεξάρτητη του χρόνου. Στο διάγραμμα φάσεων το σωματίδιο κινείται στην κατεύθυνση $\dot{q}, \dot{p}$:



Σε κάθε σημείο λοιπόν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα βέλος της ταχύτητας στο φασικό χώρο.

$$\vec{V} = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

Παίρνω την επιφάνεια $H = ct$. Θα δείξω ότι η $\vec{V}$ εφάπτεται στην επιφάνεια $H = ct$ (θυμ. για χρονοανεξάρτητη H). Πρέπει να δείξω ότι $\vec{\nabla}H \cdot \vec{V} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

Επειδή $\vec{\nabla}H = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$

Άρα το $\vec{V}$ κινείται πάντα σε μια επιφάνεια σταθερού H, γιατί δεν έχει πουθενά συνιστώσα προς τη βαθμίδα.

Αρμονικός ταλαντωτής: για να βρώ την κίνηση του $\vec{V}$ ζωγραφίζω τις καμπύλες σταθερού H που είναι ελλείψεις! Το H διατηρείται κατά την κίνηση και είναι η ενέργεια.