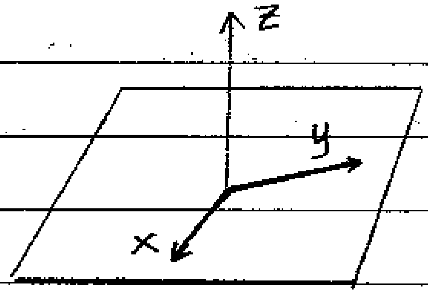
1.11.2005

Ανισότροπο σύμπαν: ισχύουν η ομογένεια στο χώρο και στο χρόνο και η γαλιλαικὴ συμμετρία.
Επομένως $L = L(\vec{v})$. Λόγω της γαλιλαιϊκής συμμετρίας η L πρέπει να είναι ανάλογη των τετραγώνων των ταχυτήτων:

$$L = a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + a_3 v_3^2$$

Δηλ. η μάζα δεν είναι πλέον μονόμετρο μέγεθος, γίνεται πίνακας.

Συμμετρία στις στροφές ως προς τον άξονα z:



τότε θα είχαμε

$$L = \frac{1}{2} a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta \dot{z}^2$$

Απόδειξη της πρότασης: "η μόνη συνάρτηση που οδηγεί σε αναβαθμονόμηση μετά από γαλιλαϊκό μετασχηματισμό είναι η $|\vec{v}|^2$."

Ισοτροπία χώρου: $L(|\vec{v}|^2)$

$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}t$ τότε $\vec{v} \to \vec{v} + \vec{a}$

$\vec{a}$: σταθερό διάνυσμα

τότε $L(|\vec{v}|^2) \to L(|\vec{v}|^2 + 2\vec{v}\vec{a} + |\vec{a}|^2) =$

$$= L\left(|\vec{v}|^2 + \frac{dg}{dt}\right)$$

$g = \vec{a}(2\vec{x} + \vec{a}t)$

Ψάχνουμε γενικά τις συναρτήσεις με την ιδιότητα $\mathcal{L}(|\vec{v}|^2 + dg/dt) = \mathcal{L}(|\vec{v}|^2) + df/dt$, αφού πραγματοποιήσουμε μετασχηματισμό γαλιλαίου.
Ο Landau αποδεικνύει ότι η μοναδική συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα είναι η $|\vec{v}|^2$.

Αναπτύσσοντας κατά Taylor (για μικρά dg/dt):

$$\mathcal{L}(|\vec{v}|^2) + \frac{dg}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial |\vec{v}|^2} \mathcal{L}(|\vec{v}|^2) + \dots$$

Για να είναι $\frac{dg}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial |\vec{v}|^2} \mathcal{L}(|\vec{v}|^2) = \frac{df}{dt}$

τότε πρέπει $\frac{\partial}{\partial |\vec{v}|^2} \mathcal{L}(|\vec{v}|^2) = ct = m$

Θεωρείστε την $\mathcal{L} = -m_o c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}$ που είναι η

λαγκρανζιανή σωματιδίου στη σχετικότητα.
Συμμετρίες : ομογένεια χώρου
ομογένεια χρόνου
ισοτροπία στον χώρο
ΔΕΝ ισχύει η γαλιλαϊκή συμμετρία.
$\vec{v} \rightarrow \vec{v} + \vec{a}$ τότε η λαγκρανζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = -m_o c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v} + \vec{a}|^2}{c^2}}$$

1) Δείξτε ότι αν $\mathcal{L} = |\vec{v}|$ δεν ισχύει η συμμετρία του Γαλιλαίου.

2) Δείξτε ότι αν $\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}$ δεν ισχύει η συμμετρία του Γαλιλαίου. Επίσης δείξτε ότι στο όριο $|\vec{v}| \ll c$ καταλήγουμε στη λαγκραντζιανή του ελεύθερου σωματιδίου

Λαγκραντζιανή θεώρηση:
γενικευμένη ορμή $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

Ο Hamilton θεώρησε $H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = H(q_i, p_i, t)$
όπου $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$

Είναι $p = p(q, \dot{q}, t)$ η οποία μπορεί να γραφεί ως $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ [υπό συνθήκες]. Επομένως η Hamiltonian προϋπτει συνάρτηση των q, p, t. Τότε οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνουν την μορφή

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Στη θεώρηση της $\mathcal{L}$ λοιπόν παίρνουμε τροχιά στον χώρο των $q - \dot{q}$, ενώ στη θεώρηση της Hamiltonian παίρνουμε τροχιά στον χώρο των

$q-p$ (φασικός χώρος).
Αν λοιπόν ήταν $L(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ πώς θα κατασκευάζαμε τη Hamiltonian;

Για να περάσουμε από τα $\dot{q}_i$ στα p_i χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς Legendre.
Έστω $p(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Ψάχνω μία συνάρτηση

$g(p)$ τέτοια ώστε $x(p) = \frac{dg(p)}{dp}$. Αν μπορώ να βρω

μια τέτοια συνάρτηση τότε η g λέγεται μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$.

Ισοδυνάμως $g(p) \equiv \max(px - f(x))$ [Να δειχθεί!]

Έστω $g = xp - f(x)$ όπου θεωρώ νοητά $x = x(p)$.

οπότε θεωρώ $x(p)$ και $f(x(p))$ και η g είναι $g(p)$.

$$\frac{dg}{dp} = x(p) + p\frac{dx(p)}{dp} - \frac{df(x)}{dx}\frac{dx(p)}{dp}$$

αλλά $\frac{df(x)}{dx} = p$ οπότε $\frac{dg}{dp} = x(p)$

Ιδιότητα: ο μετασχηματισμός Legendre της $g(p)$ προκύπτει και πάλι να είναι η $f(x)$.

Επιστρέφω λοιπόν στη Hamiltonian:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Άρα θέλουμε $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ όπου $H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$

Δηλ. η Hamiltonian είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Λαγκρανζιανής.

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \\ p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \end{array}\right\}$ Τότε ο μτσχ. Legendre είναι η Χαμιλτονιανή που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Η δεύτερη σχέση πρέπει να αποδειχθεί:

$$\frac{dp_i}{dt} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right|_{q, \dot{q}, t} = -\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{p, t}$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{q_{j \neq i}, p} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\dot{q}_a p_a) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\dot{q}_a(q, p, t) \cdot p_a\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{L}\left(q, \dot{q}(q, p, t), t\right)$$

$$= p_a \cdot \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial q_i} - \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}, t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \cdot \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial q_i}$$

$$= p_a \frac{\partial \dot q_a}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\bigg|_{\dot q, t} - p_a \frac{\partial \dot q_a}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\bigg|_{\dot q, t}$$

οπότε δείξαμε ότι $\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big|_{p_i}$

3) Δείξτε ότι $\frac{\partial H}{\partial t}\Big|_{q,p} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\Big|_{q,\dot q}$

4) Δεδομένου ότι $H = p\dot q - \mathcal{L}$ γράψτε τη δράση ως

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot q - H)\, dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot q p - H(q,p,t)\right] dt$$

Θεωρώντας τροχιές στον χώρο q-p, δείξτε ότι οι τροχιές $q(t), p(t)$ οι οποίες καθιστούν τη δράση στάσιμη ικανοποιούν τις εξισώσεις του Hamilton.

↓

2 ερμηνείες: 1) το p συνδέεται με το q (είναι η γενικευμένη ορμή)

2) το p είναι μια καινούρια μεταβλητή διαφορετική κ' ανεξάρτητη από την q.

Προσπαθήστε να το κάνετε χρησιμοποιώντας και τις δύο ερμηνείες.

Το θέμα της μάζας

$L = \frac{1}{2} a |\vec{v}|^2$. Η α είναι μία σταθερά η οποία ΔΕΝ είναι αναγκαστικά η μάζα. Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο σωματίδια.

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = L_1$$

(τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν)

m_1, m_2 : σταθερές.

5) Θα μπορούσα να γράψω $L = L_1 \cdot L_2$? Άσκηση.

Βάζω αλληλεπίδραση:

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 - V$$

Η αλληλεπίδραση δεν πρέπει να έχει σχέση με την L_1 και την L_2 (ξεχωριστή από την κινητική κατάσταση των δύο σωματίων).

Τι συνάρτηση μπορεί να είναι η V;

→ Λόγω αιτιότητας $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, t)$

→ Ομογένεια χώρου: δεν μπορεί να είναι συνάρτηση του $\vec{x}_1$ ή του $\vec{x}_2$, αλλά μόνο της διαφοράς $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

Η ομογένεια του χώρου επιτρέπει να είναι συνάρτηση των $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

→ Ομογένεια χρόνου: καμία εξάρτηση από το t.

→ Γαλιλαϊκή συμμετρία: πρέπει να έχουμε εξάρτηση από τη διαφορά των ταχυτήτων, $\vec{v}_1-\vec{v}_2$

→ Ισοτροπία του χώρου (αναλλοιότητα σε στροφές):

$$V\left(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2, |\vec{v}_1-\vec{v}_2|^2, (\vec{x}_1-\vec{x}_2)(\vec{v}_1-\vec{v}_2)\right)$$

* Το $|(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times(\vec{v}_1-\vec{v}_2)|^2$ μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των παραπάνω άρα δε χρειάζεται να το συμπεριλάβουμε.

Ο Newton θεώρησε δυναμικά της μορφής $V(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$ τα οποία ονομάζονται και Νευτώνεια.

6) Νευτώνεια δυναμικά: $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$. Να δειχθεί.

Ερώτημα:

Πηγαίνουμε σε μία διάσταση και θεωρούμε $V(x_1-x_2)$. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ αυτού και του $V(|x_1-x_2|)$ και γιατί ο Νεύτων εισάγει την απόλυτη τιμή;

Όταν έχουμε αλληλεπίδραση 2 σωματιδίων μπορούμε να υπολογίσουμε μάζες.

Αν έχουμε N σωματίδια, η αλληλεπίδραση μπορεί να μελετηθεί ανά ζεύγη. Αυτό δεν ισχύει π.χ. στην ηλεκτρασθενή αλληλεπίδραση

$$L=\sum_i \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2-\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}V\left(|\vec{x}_i-\vec{x}_j|, |\vec{v}_i-\vec{v}_j|, |(\vec{x}_i-\vec{x}_j)(\vec{v}_i-\vec{v}_j)|\right)$$

7) Θεωρούμε μονοδιάστατο πρόβλημα, 3 σωματίδια ίδιας μάζας τα οποία αλληλεπιδρούν με δυναμικό $\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_2-x_3)$. Μελετήστε την κίνηση.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3)-\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_2-x_3)$$