26.10.2005

Λύση Προβλήματος 2 της 25.10.2005

Πώς διατυπώνεται τώρα η αρχή του Hamilton?

Έχουμε $L(q,\dot{q},\ddot{q},t)$.

"Η φυσική τροχιά από τη θέση $(q_1,\dot{q}_1,t_1)$ στη θέση $(q_2,\dot{q}_2,t_2)$ είναι αυτή που καθιστά τη δράση στάσιμη.

$$S(q_\phi+\varepsilon\eta)=\int_{t_1}^{t_2} L(q_\phi+\varepsilon\eta,\dot{q}_\phi+\varepsilon\dot{\eta},\ddot{q}_\phi+\varepsilon\ddot{\eta},t)\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[L(q_\phi,\dot{q}_\phi,\ddot{q}_\phi,t)+\varepsilon\frac{\partial L}{\partial q}\bigg|_{q_\phi}\cdot\eta+\varepsilon\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\bigg|_{\dot{q}_\phi}\dot{\eta}+\varepsilon\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\bigg|_{\ddot{q}_\phi}\cdot\ddot{\eta}+\vartheta(\varepsilon^2)\right]dt$$

$$=S(q_\phi)+\varepsilon\int_{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\bigg|_{q_\phi}\cdot\eta+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\bigg|_{\dot{q}_\phi}\cdot\dot{\eta}+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\bigg|_{\ddot{q}_\phi}\cdot\ddot{\eta}\right]dt+\vartheta(\varepsilon^2)$$

Για τη στασιμοποίηση της δράσης πρέπει το ολοκλήρωμα να μηδενίζεται για οποιαδήποτε συνάρτηση η.

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\bigg|_{\dot{q}_\phi}\dot{\eta}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\eta\right)-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\cdot\eta\,dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\ddot{\eta}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\cdot\dot{\eta}\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\dot{\eta}\,dt$$

$$=\left[\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\bigg|_{\ddot{q}_\phi}\cdot\dot{\eta}\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\eta\right]dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\eta\,dt$$

$$=\left[\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\dot{\eta}\right]_{t_1}^{t_2}-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\eta\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\eta\,dt$$

$\dot{\eta}(t_1)=\dot{\eta}(t_2)=0$ και $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$ άρα οι δύο πρώτοι όροι μηδενίζονται, οπότε εν τέλει για να είναι στάσιμη η δράση πρέπει:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}}\right)\right]\eta(t)\,dt$$

οπότε οι νέες "εξισώσεις Euler-Lagrange" είναι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}}\right) = 0$$

Αν είχαμε $\mathcal{L}(q,\dot{q},\ddot{q},\dots,q^{(n)},t)$ τότε αναλόγως με τα παραπάνω θα έπρεπε να προσθαφαιρούμε παραγώγους $\frac{d^{(i)}}{dt^i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(i)}}\right)$ έως μίας τάξης μικρότερης από την (n).

Από την Αρχή του Hamilton προέρχονται εξισώσεις άρτιας τάξης. Γι' αυτό ο νόμος του Αριστοτέλη δε μπορεί να προκύψει από αρχή ελαχίστου!

Στη φύση γνωρίζουμε ότι όλοι οι θεμελιώδεις νόμοι προέρχονται από αρχές ελαχίστου.

<u>Πρόβλημα</u>: Αν ο κόσμος περιγραφόταν από την $\mathcal{L}(q,\dot{q},\ddot{q},t)$, πώς θα φτιάχνονταν οι εξισώσεις Hamilton;

Θεώρημα του Καραθεοδωρή

Εάν $|t_2 - t_1| \ll 1$ τότε η φυσική τροχιά καθιστά τη δράση ελάχιστη

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2$ λαγκρανζιανή αρμονικού ταλαντωτή - ένας βαθμός ελευθερίας

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2\right) dt$$

Θεωρώ τη φυσική τροχιά q_ϕ που ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \ddot{q}_\phi + \omega^2 q_\phi = 0$

$$S[q_\phi + \varepsilon\eta] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{1}{2}\dot{q}_\phi^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\dot{\eta}^2 - \dot{q}_\phi \varepsilon \dot{\eta} - \frac{\omega^2}{2}\left(q_\phi^2 + 2q_\phi\varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^2\right)\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\dot{q}_\phi^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2\right]dt + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{q}_\phi\dot{\eta} - \omega^2 q_\phi \eta\right)dt$$

$$+ \varepsilon^2\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\dot{\eta}^2}{2} - \frac{\omega^2\eta^2}{2}\right)dt$$

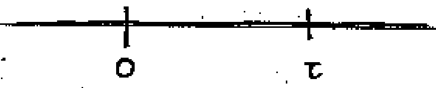
Είναι $\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{q}_\phi\dot{\eta} - \omega^2 q_\phi\eta\right)dt = 0$ (φυσική τροχιά!)

οπότε $S[q_\phi + \varepsilon\eta] = S[q_\phi] + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{\eta}^2 - \omega^2\eta^2\right)dt$

από το πρόσημο του ολοκληρώματος βρίσκουμε αν η $S[q_\phi]$ είναι μέγιστη ή ελάχιστη. Ποιο λοιπόν είναι το πρόσημο της έκφρασης $(\dot{\eta}^2 - \omega^2\eta^2)$; Ο Καραθεοδωρής απέδειξε ότι αυτή η έκφραση για αρκούντως μικρό δt είναι πάντα θετική άρα το $S[q_\phi]$ είναι ελάχιστο

Απόδειξη : θεωρούμε $\omega = 1$

και ορίζω ουσιαστικά καινούρια κλίμακα χρόνου $\tau = \omega t$, χωρίς βλάβη της γενικότητας



$$\left(\frac{d\eta}{d(\omega t)}\right)^2 - \eta^2 \sim \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 - \eta^2$$

Αναπτύσσω το η σε σειρά Fourier

$\eta = \sum a_n \sin\frac{n\pi t}{T}$ δε χρειάζεται συνημίτονο γιατί είμαστε στο μηδέν

$$\int_0^T \sin\frac{n\pi t}{T}\sin\frac{m\pi t}{T}\,dt = \delta_{mn}\cdot\frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \dot{\eta}^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,\frac{n^2\pi^2}{T^2}\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\int_0^T \eta^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\left(\frac{1}{T}\right)$$

Θεωρώ τον λόγο των δύο παραπάνω ποσοτήτων:

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2}\dot{\eta}^2\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\eta^2\,dt} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,\frac{n^2\pi^2}{T^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} = \frac{\pi^2}{T^2}\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \geq \frac{\pi^2}{T^2}$$

Η ανισότητα αυτή ονομάζεται ανισότητα του Poincaré.

Κάθε όρος της πρώτης σειράς είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της δεύτερης σειράς, οπότε ισχύει.

$$\varepsilon^2 \int_0^T (\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2)\, dt \geq \varepsilon^2 \int_0^T \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2 \right) \eta^2\, dt$$

οπότε εάν T: αρκετά μικρό ώστε $\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2 > 0$ τότε η φυσική τροχιά αντιστοιχεί στο ελάχιστο της δράσης.
Με τον ίδιο τρόπο και χρησιμοποιώντας σειρές Taylor αποδεικνύεται το γενικό θεώρημα του Καραθεοδωρή.

$$\frac{\int_0^T \dot{\eta}^2 dt}{\int_0 \eta^2 dt} = \frac{\int_0^T \frac{d\eta}{dt} \frac{d\eta}{dt} dt}{\int_0^T \eta^2 dt} = \frac{\int_0^T \eta \left(-\frac{d}{dt}\right) \eta\, dt}{\int_0^T \eta^2 dt} = (1)$$

$-\frac{d^2}{dt^2} = L$ τελεστής, οπότε γράφουμε

$$(1) = \frac{\int_0^T \eta L \eta\, dt}{\int_0^T \eta^2 dt} = R[\eta] \quad \text{πηλίκο Rayleigh}$$

Ερμιτιανός τελεστής: $\int_{t_1}^{t_2} \varphi L \psi\, dt = \int (L\varphi) \psi\, dt$
στον χώρο των πραγματικών συναρτήσεων. Θα αποδείξουμε ότι ο $L = -\frac{d^2}{dt^2}$ είναι ερμιτιανός. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα στάσιμα σημεία της παράστασης $R[\eta]$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή L.

$$\begin{cases} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, & M: \text{πίνακας με } M = M^T \text{ συμμετρικός} \\ R[x] = \dfrac{x^T M x}{x^T x} & \text{ανάλογο της παραπάνω περίπτωσης.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι οι στάσιμες

τιμές του πηλίκου είναι οι ιδιοτιμές του M:
$Mx = \lambda x$, λ: ιδιοτιμές του $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi \left(-\frac{d^2}{dt^2}\psi\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{d}{dt}\left(\varphi \frac{d\psi}{dt}\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt}\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{d^2}{dt^2}\varphi\right) \psi\, dt$$

Συζυγής απεικόνιση L^+: $\sum \varphi^* L\psi = (\varphi, L\psi) = (L^+\varphi, \psi)$
αν $L = L^+$ έχουμε αυτοσυζυγή ή ερμιτιανό τελεστή.

→ Για ποιο λόγο ένα ελεύθερο σωματίδιο στο χώρο έχει τη λαγκρανζιανή $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$;

Κενός κόσμος στον οποίο εισάγεται μία μάζα m. Ο κόσμος είναι ομογενής στον χώρο και στο χρόνο, ισότροπος, και για την κλασσική μηχανική ισχύει η γαλιλαϊκή συμμετρία. Όλες αυτές οι συμμετρίες πρέπει να αποτυπώνονται στη λαγκρανζιανή.

Είναι $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ λόγω της αιτιότητας: η θέση και η ταχύτητα προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση του σωματιδίου.
Ομογένεια χρόνου: δεν μπορεί να υπάρχει χρονική εξάρτηση → $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v})$. Ομοίως για την ομογένεια του χώρου: $\mathcal{L}(\vec{v})$

Λόγω της ισοτροπίας βρίσκουμε ότι η $\mathcal{L}$ πρέπει να εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ταχύτητας: $\mathcal{L}(|\vec{v}|^2)$
Η γαλιλαιϊκή συμμετρία οδηγεί στη μορφή $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$.

Σε μετασχηματισμό Γαλιλαίου $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{V}t$ τότε η λαγκρανζιανή $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ μετασχηματίζεται κατά έναν μετασχηματισμό βαθμονόμησης

$$\vec{v} \to \vec{v} + \vec{V}$$

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}+\vec{V}| = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + m\vec{v}\vec{V} + \frac{1}{2}m|\vec{V}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\cdot\vec{x} + \frac{1}{2}m|\vec{V}|^2 t\right).$$

Η μόνη συνάρτηση που οδηγεί σε αναβαθμονόμηση μετά από έναν γαλιλαϊκό μετασχηματισμό είναι η $|\vec{v}|^2$
Αυτό αποδεικνύεται εύκολα.

Σε έναν πλήρως ανισότροπο χώρο ποια θα ήταν η λαγκρανζιανή;