Τετάρτη 1/2/06

• σύντομη επανάληψη των διαταρακτικών εξισώσεων

$$\frac{d}{dz}\left(\bar{\rho}(U-c)^2\frac{d\psi}{dz}\right) - \left[\bar{\rho}k^2(U-c)^2 + g\bar{\rho}\right]\psi = 0$$

+ συνοριακές συνθήκες

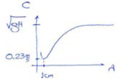
$$\psi \equiv \frac{\hat{w}}{U-c}$$

η άλλη συνιστώσα από: $ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz} = 0$

• Είδαμε ένα παράδειγμα όπου $U=0$ $\bar{\rho} = \rho_w + \Theta(z)(\rho_a - \rho_w)$

τότε $\psi'' - k^2\psi = 0$ $z \gtrless 0$

$$\psi = \psi_0 e^{-k|z|}$$



• Έστω τώρα και πάτος στη θάλασσα

$$\psi = \psi_0 \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}$$ (ο πάτος $z=-h$)

από την ασυνέχεια στην επιφάνεια,

$$c^2\left[\rho_a(-k\psi_0) - \rho_w k \coth(kh)\psi_0\right] - (\rho_a - \rho_w)g\psi_0$$

$$c^2 = \frac{g(\rho_w - \rho_a)}{\rho_w + \rho_a \tanh kh}\,\frac{\tanh(kh)}{k}$$

για $kh \ll 1$ $c^2 \simeq gh$

• εύρεση καταιγίδας (τόπου, χρόνου)

$$d = c_g (t - t_0)$$

απόσταση $\uparrow$ πότε $\uparrow$

$$c_g = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{g/k}}{2}$$

$$\frac{\omega}{k} = c = \sqrt{\frac{g}{k}} \Rightarrow c = \frac{g}{\omega}$$

$$\left.\right\} \quad d = \frac{g}{2\omega}(t - t_0)$$

$$\omega = \frac{g}{2d}(t - t_0)$$

από την κλίση του $\omega(t)$ βρίσκουμε την απόσταση.

• Έστω $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow$ αστάθεια

$$c^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\frac{g}{k} \qquad c = \pm i \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\text{αστάθεια} \sim e^{k(\mathrm{Im}\, c)t}$$

(αστάθεια Rayleigh-Taylor)

$$\lambda = \sqrt{kg \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2}}$$

ρυθμ. εκθ. αύξησης

$$k \to \infty \quad \lambda \to \infty$$

οι μικρές διαταραχές μεγαλώνουν με ταχύτερο ρυθμό

• Έστω η ταχύτητα $U(z) = U_1 + \Theta(z)(U_2 - U_1)$

$\uparrow$

λογικό για μεγάλα μήκη κύματος $(k \ll 1)$

και $\bar{\rho} = \rho_1 + \Theta(z)(\rho_2 - \rho_1)$

ψ : συνεχής

$$\bar{\rho}(U-c)^2 \frac{d\psi}{dz}\Big|_-^+ = g(\rho_2-\rho_1)\,\psi(0)$$

$$\text{και} \quad \psi'' - k^2\psi = 0 \qquad z \gtrless 0$$

$$\psi = \psi_0\, e^{-k|z|}$$

$$-k\,\rho_2(U_2-c)^2\psi_0 - k\rho_1(U_1-c)^2\psi_0 = g(\rho_2-\rho_1)\psi_0$$

Έστω $\rho_2 = \rho_1$ $\qquad (U_2-c)^2 + (U_1-c)^2 = 0$

$$[U_2 - c + i(U_1-c)][U_2 - c - i(U_1-c)] = 0$$

$$c = \frac{U_2 + iU_1}{1+i} \qquad \text{ή} \qquad c = \frac{U_2 - iU_1}{1-i}$$

$$= \frac{U_2+U_1}{2} \pm i\,\frac{U_1-U_2}{2}$$

ρυθμός εξ. αύξησης $= k\,\dfrac{|U_1-U_2|}{2}$

αστάθεια Kelvin – Helmholtz.

αν έχω διαφορά στην πυκνότητα

$$\rho_2(U_2-c)^2+\rho_1(U_1-c)^2-\frac{g}{k}(\rho_1-\rho_2)=0.$$

$$\rho_2U_2^2+\rho_1U_1^2+c^2(\rho_1+\rho_2)-2(U_1\rho_1+U_2\rho_2)c=0$$
$$-\frac{g}{k}(\rho_1-\rho_2)$$

$$c^2-2c\,\frac{\rho_1U_1+\rho_2U_2}{\rho_1+\rho_2}+\frac{\rho_2U_2^2+\rho_1U_1^2}{\rho_1+\rho_2}-\frac{g}{k}\,\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}=0$$

$$c=\frac{\rho_1U_1+\rho_2U_2}{\rho_1+\rho_2}\pm\sqrt{\left(\frac{\rho_1U_1+\rho_2U_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^2-\frac{\rho_2U_2^2+\rho_1U_1^2}{\rho_1+\rho_2}+\frac{g}{k}\,\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}}$$

αστάθεια όταν $\sqrt{\;}^2<0$

$$(\rho_1U_1+\rho_2U_2)^2-(\rho_2U_2^2+\rho_1U_1^2)(\rho_1+\rho_2)+\frac{g}{k}(\rho_1^2-\rho_2^2)<0$$

$$-\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(U_1-U_2)^2+\frac{g}{k}(\rho_1^2-\rho_2^2)<0.$$

$$\frac{g}{k}(\rho_1-\rho_2)<\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(U_1-U_2)^2$$

αστάθεια όταν $k>k_0$

$$k_0=g(\rho_1-\rho_2)\,\frac{(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2(U_1-U_2)^2}$$

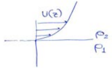
αριθμητικά $\rho_w = 10^3\ kg/m^3 \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 10\ m/s$

$$k_* = \frac{10 \times 10^3}{10^2} \simeq 100\ m^{-1}$$

$$\lambda_{max} = \frac{2\pi}{100} \simeq 6cm$$

πολύ μικρά κύματα

προβλέπει!



$$\rho_2/\rho_1 \approx 10^{-3} = \varepsilon$$

περιμένουμε $\lambda \sim O(\varepsilon)$

$$\bar{\rho} = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\,\Theta(z)$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \quad (\text{στο νερό})$$

$$\psi = \psi_0 e^{+kz}$$

για $z > 0$ $$\frac{d}{dz}\left((U-c)^2 \frac{d\psi_2}{dz}\right) - k^2 (U-c)^2 \psi_2 = 0 \quad (\rho_2 = \text{σταθερό})$$

$$|\psi_2| \to 0 \quad z \to \infty$$

στο $z=0$ $$c^2\left(\rho_2 \psi_2'(0) - \rho_1 k \psi_2(0)\right) = -g(\rho_1 - \rho_2)\psi_2(0)$$

$$c^2\left(k - \varepsilon\, \psi_2'(0)/\psi_2(0)\right) = g(1-\varepsilon)$$

$$c^2 = \frac{g(1-\varepsilon)}{k - \varepsilon\, \psi_2'/\psi_2\big|_0}$$

$$c = c_0 + \varepsilon c_1$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad c_1 = \underbrace{-\frac{c_0}{2} + \frac{c_0}{2}\,\frac{\psi_2'(0)}{k\,\psi(0)}}_{\text{μήπως μπορεί να γίνει φανταστικό}}$$

$$\lambda = k\, \mathrm{Im}(c) = \frac{\varepsilon}{2} c_0\, \mathrm{Im}\left(\frac{\psi_2'(0)}{\psi(0)}\right)$$

$$\psi = \frac{\hat{w}}{U-c} \qquad \frac{d\psi}{dz} = \frac{\hat{w}'}{U-c} - \frac{\hat{w}U'}{(U-c)^2}$$

$$\frac{d\psi}{dz}(U-c)^2 = (U-c)\hat{w}' - wU'$$

έτσι ή $\quad \frac{d}{dz}\left[(U-c)\hat{w}' - wU'\right] - k^2(U-c)\hat{w} = 0.$

$\vdots$ απλοποιείται σε:

$$(U-c)(w''-k^2w) - wU'' = 0 \quad \text{(εξίσωση Rayleigh)}$$

όμως $\quad \frac{d\psi/dz}{\psi} = \frac{w'}{w} - \frac{U'}{U-c}$

$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1$ (όπως και το c)

$\hat{w} = \hat{w}_0 + \varepsilon\hat{w}_1$

$$(U-c_0)(w_0''-k^2w_0) - U''w_0 = 0 \qquad (*)$$

$$\partial = \frac{\varepsilon}{2} c_0 \,\mathrm{Im}\left(\frac{w_0'}{w_0}\right) \quad \text{αφού το } \frac{U'}{U-c} \in \mathbb{R}$$

όμως στην $(*)$ όταν $U = c_0$ (καθώς κατεβαίνει καθείς προς την επιφάνεια)

$$w_0'' - k^2 w - \frac{U''}{U-c_0} w = 0 \quad \text{στο μιγαδικό επίπεδο}$$

$$\begin{cases} w^* w'' - k^2 w w^* - \dfrac{U''}{U-c_0} w w^* = 0 \\ w w^{*''} - k^2 w w^* - \dfrac{U''}{U-c_0^*} w w^* = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}\Big(\underbrace{w^*w' - ww^{*\prime}}_{\left[\,2i\,\mathrm{Im}(w^*w')\right]'}\Big) = U''\,|w|^2\,\frac{U-c^*-U+c}{(U-c_r)^2+c_i^2}$$

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Im}(w^*w') = \frac{U''\,c_i\,|W|^2}{(U-c_r)^2+c_i^2}$$

$$\Big\downarrow c_i \to 0^+$$

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Im}(w^*w') = \lim_{c_i\to 0}\underbrace{\frac{U''\,c_i\,|W|^2}{(U-c_r)^2+c_i^2}}_{f(z)=\begin{cases}0 & z\neq z_c \quad U(z_c)=c_r\end{cases}}$$

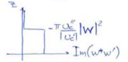
$$c_i\int_{z_c^-}^{z_c^+}\frac{U_c''\,|W|^2\,dz}{U_c'^{\,2}(z-z_c)^2+c_i^2}$$

$$= \frac{c_i\,U_c''}{U_c'^{\,2}}\,|W|_c^2\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{dx}{x^2+\lambda^2}$$

$$= \frac{c_i\,U_c''}{U_c'^{\,2}}\,|W|_c^2\;\frac{2}{\lambda}\tan^{-1}\!\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$$ **όπου** $\lambda = \frac{c_i}{U_c'}$ **στο όριο που** λ **τείνει στο μηδέν**

$$= \frac{U_c''}{|U_c'|}\,\pi\,|W|_c^2$$

Επομένως $$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Im}(w^*w') = \frac{U_c''}{|U_c'|}\,\pi\,|W|_c^2\,\delta(z-z_c)$$



$$\lambda = -\frac{\epsilon}{2} c_0 \pi \frac{U_c''}{|U_c'|} |W|_c^2$$

όταν $U_c'' < 0$ τότε έχω αστάθεια και δημιουργούνται κύματα που μεγαλώνουν εκθετικάμε το χρόνο, με ρυθμό αύξησης ανάλογο του ϵ